

## Polynésie juin 2006

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$  ; unité graphique 2 cm.

On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives  $a = 1$  et  $b = -1$ .

On considère l'application  $f$  qui, à tout point M différent du point B, d'affixe  $z$ , fait correspondre le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par :

$$z' = \frac{z-1}{z+1}.$$

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.

1. Déterminer les points invariants de  $f$  c'est-à-dire les points M tels que  $M = f(M)$ .
2. a. Montrer que, pour tout nombre complexe  $z$  différent de  $-1$ ,  $(z'-1)(z+1) = -2$ .  
b. En déduire une relation entre  $|z'-1|$  et  $|z+1|$ , puis entre  $\arg(z'-1)$  et  $\arg(z+1)$ , pour tout nombre complexe  $z$  différent de  $-1$ .  
Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.
3. Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors  $M'$  appartient au cercle (C') de centre A et de rayon 1.
4. Soit le point P d'affixe  $p = -2 + i\sqrt{3}$ .
  - a. Déterminer la forme exponentielle de  $(p+1)$ .
  - b. Montrer que le point P appartient au cercle (C).
  - c. Soit Q le point d'affixe  $q = -\bar{p}$  où  $\bar{p}$  est le conjugué de  $p$ .  
Montrer que les points A, P' et Q sont alignés.
  - d. En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P' du point P par l'application  $f$ .

## CORRECTION

1. Si  $z \neq -1$ ,  $z = \frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow z^2 + z = z - 1 \Leftrightarrow z^2 = -1$

$\Leftrightarrow z = i$  ou  $z = -i$ . Les points invariants par  $f$  sont les deux points d'affixes  $i$  et  $-i$

2. a.  $z \neq -1$ ,  $(z'-1)(z+1) = \left(\frac{z-1}{z+1} - 1\right)(z+1)$

$z \neq -1$ ,  $(z'-1)(z+1) = z-1 - (z+1) = -2$

b. L'égalité de ces deux complexes entraîne l'égalité de leurs modules  
 $|(z'-1)(z+1)| = |-2| \Leftrightarrow |z'-1| \times |z+1| = 2$

De même pour les arguments :

$\arg[(z'-1)(z+1)] = \arg(-2) + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$\arg(z'-1) + \arg(z+1) = \pi + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$|z'-1| \times |z+1| = 2 \Leftrightarrow AM' \times BM = 2$

$\arg(z'-1) + \arg(z+1) = \pi + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$\Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = \pi + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

3. M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2 si et seulement si  $BM = 2$

or pour tout point M du plan différent de B,  $AM' \times BM = 2$

donc en remplaçant :  $2 AM' = 2 \Leftrightarrow AM' = 1$

donc  $M'$  appartient au cercle (C') de centre A et de rayon 1.

4. a.  $p+1 = -2 + 1 + i\sqrt{3}$ .

D'où  $|p+1|^2 = 1 + 3 = 4 \Leftrightarrow |p+1| = 2$ .

Donc

$p+1 = 2(\cos \theta + i \sin \theta) = -1 + i\sqrt{3}$ .

$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ donc } p+1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

b.  $|p+1| = 2 \Leftrightarrow BP = 2 \Leftrightarrow P$  appartient au cercle (C).

c. Pour tout complexe  $z \neq -1$  :  $|z'-1| \times |z+1| = 2$

et  $\arg(z'-1) + \arg(z+1) = \pi + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

donc pour  $z = p$  on obtient :

$|p'-1| \times |p+1| = 2$  et  $\arg(p'-1) + \arg(p+1) = \pi + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

donc  $|p'-1| = 1$  et  $\arg(p'-1) + \pi - \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

soit  $|p' - 1| = 1$  et  $\arg(p' - 1) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) donc  $p' - 1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$p + 1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$  donc  $\overline{p} + 1 = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

soit  $1 - q = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$  donc  $q - 1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

soit  $\overline{AQ} = 2\overline{AP'}$  donc les points A, P' et Q sont alignés et P est le milieu de [AQ].

**d.** On en déduit une construction simple de P' :

- Construire Q symétrique de P autour de l'axe des ordonnées ;
- P' est le milieu de [AQ].