Antilles-Guyane juin 2009

EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme de fractions.

On dispose de deux dés tétraédriques identiques : les quatre faces sont numérotées A, B, C et D.

1. On lance les deux dés simultanément et on note la lettre de la face sur laquelle repose chacun des dés.

Déterminer la probabilité des événements suivants :

– E_0 : « ne pas obtenir la lettre A »,

– E_1 : « obtenir une fois la lettre A »,

– E_2 : « obtenir deux fois la lettre A ».

2. On organise un jeu de la façon suivante :

– Le joueur lance les deux dés simultanément.

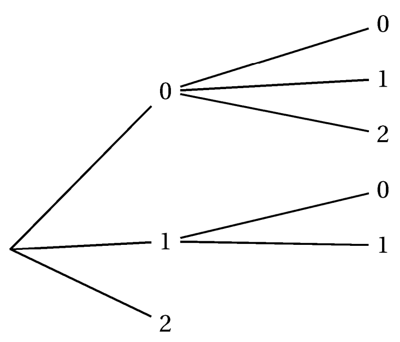
– Si les deux dés reposent sur les faces « A », le jeu s'arrête.

– Si un seul dé repose sur la face « A », le joueur relance l'autre dé et le jeu s'arrête.

– Si aucun dé ne repose sur la face « A », le joueur relance les deux dés et le jeu s'arrête.

a. Recopier et compléter l'arbre suivant en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.

Nombre de faces « A » Nombre de faces « A »



1^{er} lancer 2^e lancer

b. Le joueur gagne si, lorsque le jeu s'arrête, les deux dés reposent sur les faces « A ».

Montrer que, pour le joueur, la probabilité de gagner est de $\dfrac{49}{256}$.

c. Pour participer, le joueur doit payer 5 euros. S'il gagne, on lui donne 10 euros. Si, lorsque le jeu s'arrête, un seul dé repose sur la face « A », il est remboursé. Sinon, il perd sa mise. Le jeu est-il favorable au joueur ?

EXERCICE 2 5 points Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z' telle que :

$$z' = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})z + 2\sqrt{3}.$$

On note A le point d'affixe 2 i .

Affirmation : f est la similitude directe, de centre A, d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et de rapport 2.

2. **Affirmation :** $1\,991^{2\,009} \equiv 2\ (7)$.

3. a et b sont deux entiers relatifs quelconques, n et p sont deux entiers naturels premiers entre eux.

Affirmation : $a \equiv b\ (p)$ si et seulement si $n\,a \equiv n\,b\ (p)$.

4. L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

E est l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées $(x ; y ; z)$ vérifient l'équation : $z = x^2 + y^2$. On note S la section de E par le plan d'équation $y = 3$.

Affirmation : S est un cercle.

5. L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

P est la surface d'équation $x^2 + y^2 = 3z^2$.

Affirmation : O le seul point d'intersection de P avec le plan (yOz) à coordonnées entières.

EXERCICE 2 5 points Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v}\,)$.

Soit le point A d'affixe 3, le point B d'affixe $-4\,\mathrm{i}$ et l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $|z-3|=|z+4\,\mathrm{i}|$.

Affirmation : E est la médiatrice du segment [AB].

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v}\,)$.

On considère trois points A, B et C deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c, tels que $\dfrac{c-a}{b-a}=2\,\mathrm{i}$.

Affirmation : A appartient au cercle de diamètre [BC].

3. On considère le nombre $z=2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{7}}$.

Affirmation : $z^{2\,009}$ est un nombre réel positif.

4. On considère trois points A, B et C non alignés de l'espace. Le point G est le centre de gravité du triangle ABC.

On note F l'ensemble des points M vérifiant $\left\|\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right\|=6$.

Affirmation : F est la sphère de centre de G et de rayon 2.

5. L'espace est muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$.

S est la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=5$.

P est le plan d'équation $x+y-5=0$.

Affirmation : Le plan P coupe la sphère S suivant un cercle.

EXERCICE 3 7 points Commun à tous les candidats

PARTIE A.

La température de refroidissement d'un objet fabriqué industriellement est une fonction f du temps t .

f est définie sur l'ensemble des nombres réels positifs et vérifie l'équation différentielle : $f'(t)+\dfrac{1}{2}f(t)=10$.

La température est exprimée en degrés Celsius (°C) et le temps t en heures.

1. Déterminer $f(t)$ pour $t>0$, sachant que pour $t=0$, la température de l'objet est 220° C.

2. On pourra admettre désormais que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t)=200\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}+20$.

On note C sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal ; les unités graphiques sont 2 cm pour une heure en abscisse et 1 cm pour vingt degrés Celsius en ordonnée.

a. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$.

b. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

En déduire l'existence d'une asymptote D à la courbe C en $+\infty$.

c. Construire D et C sur l'intervalle [0 ; 7].

3. *a.* Utiliser le graphique pour déterminer une valeur approchée, en heures et minutes, du moment où la température de l'objet est 50° C. On laissera apparents les traits de construction.

b. Retrouver ce résultat par le calcul.

PARTIE B.

On considère la suite de terme général $d_n=f(n)-f(n+1)$ où $n\in\mathbb{N}$. d_n représente l'abaissement de température de l'objet entre l'heure n et l'heure $n+1$.

1. *a.* Calculer des valeurs approchées au dixième de d_0, d_1 et d_2.

b. Quelle est la limite de d_n quand n tend vers $+\infty$?

2. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle l'abaissement de température est inférieur à 5° C.

EXERCICE 4 4 points Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x)=x-\ln(1+x)$.

a. En étudiant les variations de la fonction f ,montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\ln(1+x)\leq x$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_n)\leq 1$.

c. La suite (u_n) peut-elle avoir pour limite $+\infty$?

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $v_n=\ln(u_n)$.

a. On pose $x=\dfrac{1}{n}$. Exprimer v_n en fonction de x.

b. Que vaut $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$? Aucune justification n'est demandée.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

CORRECTION

EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

1.

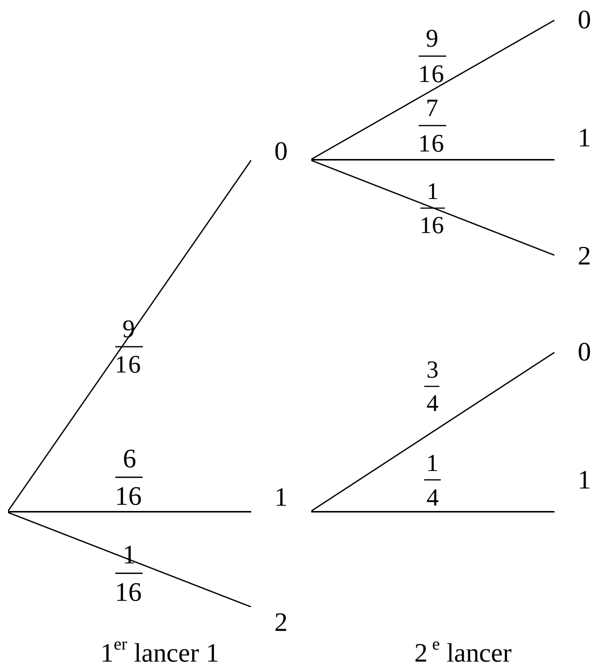
Dé 1 / Dé 2	A	B	C	D
A	AA	AB	AC	AD
B	BA	BB	BC	BD
C	CA	CB	CC	CD
D	DA	DB	DC	DD
Les tirages sont équiprobables, le nombre de cas possibles est $4^2 = 16$				

Dé 1 / Dé 2	A	B	C	D
A	AA	AB	AC	AD
B	BA	BB	BC	BD
C	CA	CB	CC	CD
D	DA	DB	DC	DD
$p(E_0) = \frac{9}{16}$				

Dé 1 / Dé 2	A	B	C	D
A	AA	AB	AC	AD
B	BA	BB	BC	BD
C	CA	CB	CC	CD
D	DA	DB	DC	DD
$p(E_1) = \frac{6}{16}$				

Dé 1 / Dé 2	A	B	C	D
A	AA	AB	AC	AD
B	BA	BB	BC	BD
C	CA	CB	CC	CD
D	DA	DB	DC	DD
$p(E_2) = \frac{1}{16}$				

2. *a.*



b. le joueur gagne quand il obtient :

• deux faces « A » au premier lancer, ($p_1 = \frac{1}{16}$) ou bien

• une face «A » au premier lancer, et une face «A » au deuxième, ($p_2 = \frac{6}{16} \times \frac{1}{4}$) ou bien

• 0 face « A » au premier lancer, et deux faces « A » au second ($p_3 = \frac{9}{16} \times \frac{1}{16}$)

donc la probabilité que le joueur gagne est $p = \frac{1}{16} + \frac{6}{16} \times \frac{1}{4} + \frac{9}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{49}{256}$.

c. Soit X la variable aléatoire désignant le gain algébrique du joueur. Lorsque le joueur gagne, X = 5, donc $p(X = 5) = \frac{49}{256}$

Lorsqu'un seul dé repose sur la face « A » X = 0, soit au premier soit au deuxième lancer, donc :

$p(X = 0) = \frac{9}{16} \times \frac{5}{16} + \frac{6}{16} \times \frac{3}{4} = \frac{126}{256}$

Lorsque le joueur n'obtient aucune face « A » X = − 5, donc $p(X = -5) = \frac{9}{16} \times \frac{9}{16} = \frac{81}{256}$ Soit en résumé :

x	-5	0	5	Total
$p(X = x)$	$\frac{81}{256}$	$\frac{126}{256}$	$\frac{49}{256}$	1
$x\,p(X = x)$	$-\frac{405}{256}$	0	$\frac{245}{256}$	$-\frac{160}{256}$

L'espérance mathématique de X est alors égale à : $-\frac{160}{256} < 0$ donc le jeu est défavorable au joueur.

EXERCICE 2 5 points Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. L'écriture complexe de f est de la forme $z' = a\,z + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, f est donc une similitude directe.

De plus :

• $a = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, donc $|a|^2 = 1 + 3 = 4$ donc $|a| = 2$, f a pour rapport 2.

• $a = 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$ donc $\arg(a) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) f a pour angle $\frac{\pi}{3}$.

• f (A) est le point d'affixe $(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) \times 2\mathrm{i} + 2\sqrt{3} = 2\mathrm{i} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 2\mathrm{i}$, donc f (A) = A, donc le centre de f est A.

La première affirmation est donc **vraie**.

2. $1\,991 = 7 \times 284 + 3$ donc $1991 \equiv 3\ (7)$. De plus $3^2 \equiv 2\ (7)$ et $3^2 \equiv -1\ (7)$ donc $3^6 \equiv 1\ (7)$.
$2009 = 6 \times 334 + 5$ donc $3^{2\,009} \equiv 3^{6\times 334 + 5}\ (7)$ donc $3^{2\,009} \equiv 3^{6\times 334} \times 3^5\ (7)$
$3^{2\,009} \equiv 3^5\ (7)$, soit : $3^{2\,009} \equiv 3^2 \times 3^3\ (7)$ donc $3^{2\,009} \equiv -1 \times 2\ (7)$, soit : $3^{2\,009} \equiv -2\ (7)$.
Finalement $1991^{2009} \equiv -2\ (7)$.
La deuxième affirmation est donc **fausse**.

3. si $a \equiv b\ (p)$ alors p divise $a - b$ donc p divise $n\,(a - b)$ soit $n\,a \equiv n\,b\ (p)$.

si $n\,a \equiv n\,b\ (p)$ alors p divise $n\,a - n\,b$ soit p divise $n\,(a - b)$
n et p sont deux entiers naturels premiers entre eux et p divise $n\,(a - b)$ alors p divise $a - b$ (théorème de Gauss)
soit $a \equiv b\ (p)$
L'équivalence est démontrée. La troisième affirmation est donc **vraie**.

4. M appartient à (S) $\cap$ (P) $\Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 + 9 \\ y = 3 \end{cases}$

Dans le plan (P) d'équation $y = 3$, $z = x^2 + 9$ est l'équation d'une parabole. La quatrième affirmation est donc **fausse**.

5. Soit M(x ; y ; z) un point de l'espace à coordonnées entières appartenant à (P) et au plan (yOz).

• M = O vérifie ces conditions, puisque $x = 0$, $0^2 + 0^2 = 3 \times 0^2$ et $0 \in \mathbb{Z}$.

• Supposons qu'il existe un point M d'intersection de P avec le plan (yOz) à coordonnées entières distinct de O.
M $\in$ (yOz) donc $x = 0$.
M appartient à (yOz) $\cap$ (P) $\Leftrightarrow y^2 = 3\,z^2$ et $x = 0$

$z \neq 0$ (car sinon y serait nul et M serait confondu avec O), donc $\left(\frac{y}{z}\right)^2 = 3$ donc $\frac{y}{z} = \sqrt{3}$ ou $\frac{y}{z} = -\sqrt{3}$

or y et z sont des entiers relatifs donc $\frac{y}{z} \in$ Z or $\sqrt{3} \notin$ Z. Il n'existe pas de point d'intersection de P avec le plan (yOz) à coordonnées entières distinct de O.
La cinquième affirmation est donc **vraie**.

EXERCICE 2 5 points Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1. AM = $|z - 3|$ et BM = $|z + 4\mathrm{i}|$ donc $|z - 3| = |z + 4\mathrm{i}| \Leftrightarrow$ AM = BM $\Leftrightarrow$ E est la médiatrice du segment [AB].
La première affirmation est **vraie**.

2. $\arg\frac{c - a}{b - a} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ donc si $\frac{c - a}{b - a} = 2\mathrm{i}$ alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ donc le triangle ABC est rectangle en A donc A appartient au cercle de diamètre [BC].
La deuxième affirmation est **vraie**.

3. $z^{2\,009} = 2^{2\,009}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,2009\frac{\pi}{7}} = 2^{2\,009}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,287\pi}$ or $287\pi = 143 \times 2\pi + \pi$ donc $z^{2\,009} = 2^{2\,009}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -2^{2\,009}$.
La troisième affirmation est donc **fausse**.

4. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ donc M $\in$ F $\Leftrightarrow \left\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 6 \Leftrightarrow 3$ MG $= 6 \Leftrightarrow$ MG $= 2$

F est la sphère de centre de G et de rayon 2. La quatrième affirmation est **vraie**.

5. La sphère (S) a pour centre O et pour rayon $\sqrt{5}$, la distance de O au plan P est $d = \frac{|0 + 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$

Cette distance est supérieure au rayon de la sphère donc le plan P ne coupe pas la sphère S.
La cinquième affirmation est donc **fausse**.

EXERCICE 3 7 points Commun à tous les candidats
PARTIE A.

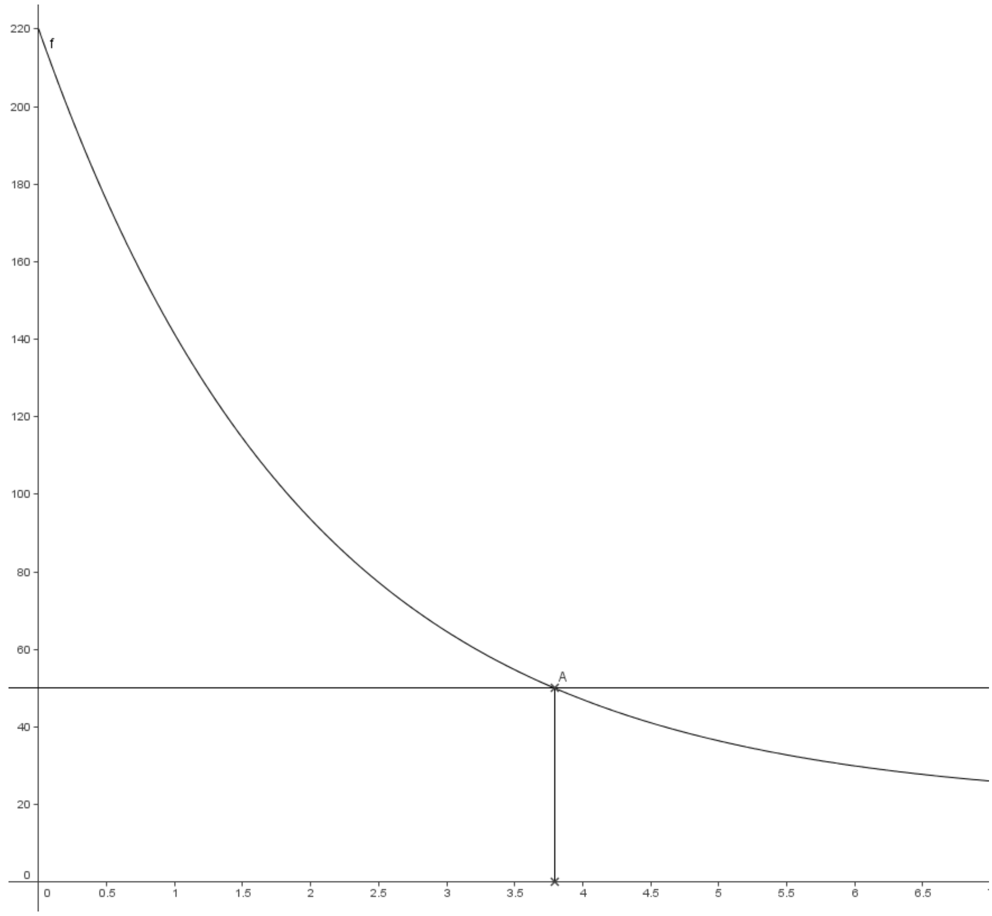
1. Les solutions de $y' = a\,y + b$ sont de la forme $y(t) = C\,e^{a\,t} - \frac{b}{a}$ donc il existe un réel C tel que $f(t) = C\ e^{-\frac{t}{2}} + 20$

$f(0) = 220$ donc $C + 20 = 220$ soit $C = 200$. $f(t) = 200\ e^{-\frac{t}{2}} + 20$.

2. *a.* $f'(t) = -100\ e^{-\frac{t}{2}}$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} -\frac{t}{2} = -\infty$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 20$ donc la droite d'équation $y = 20$ est asymptote à la courbe C en $+\infty$.

c.



3. *a.* une valeur approchée de la solution de $f(t) = 50$ est $t \approx 3{,}8$ soit 3 heures 48 minutes.

b. $f(t) = 50 \Leftrightarrow 200\ e^{-\frac{t}{2}} + 20 = 50 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{2}} = \frac{30}{200} \Leftrightarrow -\frac{t}{2} = \ln 0{,}15 \Leftrightarrow t = -2 \ln 0{,}15$

donc $t \approx 3{,}79$, on retrouve le résultat précédent

PARTIE B.

1. *a.* $d_0 = f(0) - f(1)$ donc $d_0 \approx 78{,}69$

$d_1 = f(1) - f(2)$ donc $d_1 \approx 47{,}73$

$d_2 = f(2) - f(3)$ donc $d_2 \approx 28{,}95$

b. $d_n = 200\ \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}} + 20 - \left(200\ \mathrm{e}^{-\frac{n+1}{2}} + 20\right) = 200\left(1 - \mathrm{e}^{-0,5}\right)\ \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} -\dfrac{n}{2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$ donc par composition $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = 0$

2. $d_n = 200\left(1 - \mathrm{e}^{-0,5}\right)\ \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}$ donc $d_n \leq 5 \Leftrightarrow 200\left(1 - \mathrm{e}^{-0,5}\right)\ \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}} \leq 5 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}} \leq \dfrac{5}{200\left(1 - \mathrm{e}^{-0,5}\right)} \Leftrightarrow n \geq -2\ln\left(\dfrac{5}{200\left(1 - \mathrm{e}^{-0,5}\right)}\right)$

On peut simplifier l'écriture en remarquant que $\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}} \leq \dfrac{5}{200\left(1 - \mathrm{e}^{-0,5}\right)} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{n}{2}} \geq \dfrac{200\left(1 - \mathrm{e}^{-0,5}\right)}{5} \Leftrightarrow n \geq \ln\left(40\left(1 - \mathrm{e}^{-0,5}\right)\right)$

$\ln\left(40\left(1 - \mathrm{e}^{-0,5}\right)\right) \approx 5{,}5$ donc la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle l'abaissement de température est inférieur à 5° C est $n_0 = 6$

EXERCICE 4 4 points Commun à tous les candidats

1. *a.* La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout réel $x > 0$: $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} > 0$

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x > 0$, $f(x) > f(0)$, soit $x - \ln(1+x) > 0$,

donc : $\ln(1+x) \leq x$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) = n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

$\dfrac{1}{n} > 0$, donc d'après la question précédente $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \leq \dfrac{1}{n}$ donc $n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \leq 1$ soit pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_n) \leq 1$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) \leq 1$, donc $u_n \leq \mathrm{e}$ et la suite (un) est majorée par e, elle ne peut donc pas avoir pour limite $+\infty$.

2. *a.* $v_n = \ln(u_n) = n\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$, en posant $x = \dfrac{1}{n}$ alors $v_n = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

.

b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$.

c. $v_n = \ln(u_n)$, donc $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \mathrm{e}$.