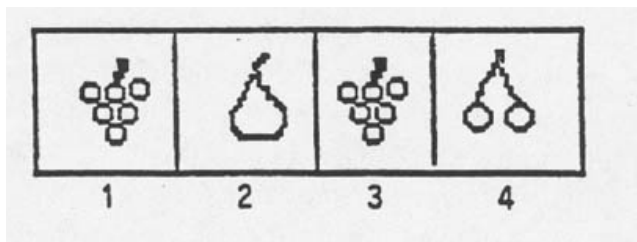


Dans une salle de jeu un appareil comporte 4 roues, chacune portant à sa périphérie 8 images de fruits différents : Ananas, Bananes, Cerises, Dattes, Fraises, Groseilles, Poires, Raisins.

Une mise de 1F déclenche le fonctionnement de l'appareil pour une partie.

Chacune des quatre roues affiche au hasard dans une fenêtre un de ces 8 fruits.

Exemple d'affichage :



On admettra que tous les événements élémentaires sont équiprobables.

Calculez la probabilité des événements suivants :

E : on obtient quatre fruits identiques;

F : on obtient trois fruits identiques et trois seulement;

G : on obtient quatre fruits distincts.

Certains résultats permettent de gagner de l'argent :

50 F pour quatre fruits identiques ;

5 F pour trois fruits identiques ;

1 F pour quatre fruits distincts ;

0 F pour les autres résultats.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque résultat associe le gain indiqué ci-dessus.

1. a : Quelle est la probabilité de l'événement "obtenir un gain non nul" ?

b : Déterminez l'espérance mathématique de X, notée E[X].

N.B. Les résultats seront donnés sous forme décimale avec trois chiffres significatifs.

### CORRECTION

1. Appelons  $E = \{a ; b ; c ; d ; f ; g ; p ; r\}$  les résultats possibles sur une roue. Il y a 4 roues ; l'ensemble des résultats possibles de ces 4 roues correspond alors au produit cartésien

$$E \times E \times E \times E = E^4 = \Omega .$$

Le cardinal de cet ensemble est alors

$$\text{Card}(E^4) = \text{Card}(\Omega) = 8^4 .$$

On est en situation d'équiprobabilité.

E : "4 fruits distincts" . Le cardinal de E est 8. Donc

$$p(E) = \frac{\text{card}(E)}{8^4} = \frac{1}{8^3} \approx 0,00195$$

F : "3 fruits identiques et 3 seulement" :

Une éventualité de F correspond au choix de 2 fruits parmi les 8 fruits ; a et b par exemple.

Il y a  $C_8^2 = 28$  façons de choisir ces 2 fruits. Puis ; une fois le choix des 2 fruits  $\{x ; y\}$  ; il y a 4 façons de placer le fruit x sur une des roues et d'attribuer alors les 3 places restantes à y. Même résultat si on place y sur une roue et x sur 3 roues.

Le cardinal de F est alors :  $C_8^2 \times 8$  et donc :

$$p(F) = \frac{28 \times 8}{8^4} \approx 0,05468$$

G : "4 fruits distincts"

Il y a  $C_8^4 = 70$  façons de choisir 4 fruits distincts parmi les 8. Pour chaque choix de ces 4 fruits ; il y a  $4! = 24$  façons de les placer sur les 4 roues.

Le cardinal de G est donc :  $70 \times 24 = 1\ 680$ . Donc :  $p(G) = \frac{1\ 680}{8^4} \approx 0,41053$

2. "X = 50" = "4 fruits identiques" = E

"X = 5" = "3 fruits identiques (sous-entendu ; 3 seulement)" = F

"X = 1" = "4 fruits distincts" = G

Donc :  $p(X = 0) = 1 - p(E) - p(F) - p(G)$ . Il ne reste plus qu'à faire le calcul.

L'espérance de X est :  $E[X] = p(X = 0) \times 0 + p(X = 1) \times 1 + p(X = 5) \times 5 + p(X = 50) \times 50$ .

$$\text{D'où : } E(X) = \frac{25}{32}$$