Polynésie juin 2016

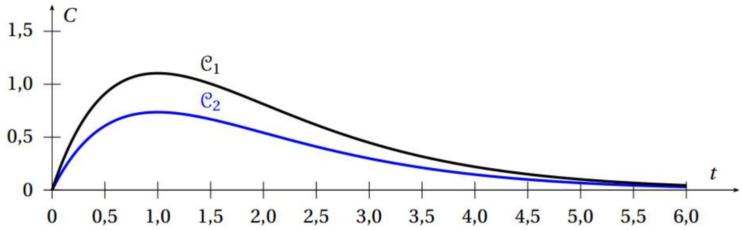
EXERCICE 1 7 points Commun à tous les candidats

Partie A

Voici deux courbes C_1 et C_2 qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.

C est exprimée en gramme par litre et t en heure.

Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps



1. La fonction C est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et on note C' sa fonction dérivée. À un instant t positif ou nul, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par $C'(t)$.

À quel instant cette vitesse est-elle maximale ?

On dit souvent qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.

2. Sur le graphique précédent, identifier la courbe correspondant à la personne la plus corpulente. Justifier le choix effectué.

3. Une personne à jeun absorbe de l'alcool. On admet que la concentration C d'alcool dans son sang peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(t) = A\,t\,e^{-t}$$

où A est une constante positive qui dépend de la corpulence et de la quantité d'alcool absorbée.

a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(0)$.

b. L'affirmation suivante est-elle vraie ? « À quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, plus la personne est corpulente. »

Partie B - Un cas particulier

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 2\,t\,e^{-t}$.

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

2. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.

3. Rappeler la limite de $\frac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ en $+\infty$.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture.

On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de $0{,}2\ g.L^{-1}$ pour un jeune conducteur.

a. Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 0{,}2$.

b. Quelle durée minimale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ?

Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche.

5. La concentration minimale d'alcool détectable dans le sang est estimée à $5 \times 10^{-3}\ g.L^{-1}$.

a. Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

b. On donne l'algorithme suivant où f est la fonction définie par $f(t) = 2\,t\,e^{-t}$.

Initialisation :	t prend la valeur 3,5 p prend la valeur 0,25 C prend la valeur 0,21

Traitement :	Tant que $C > 5 \times 10^{-3}$ faire :
	    t prend la valeur $t + p$
	    C prend la valeur $f(t)$
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher t

Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en exécutant cet algorithme. Arrondir les valeurs à 10^{-2} près.

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25		
t	3,5		
C	0,21		

Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?

EXERCICE 2 3 points Commun à tous les candidats

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 2\,u_n + 2\,n^2 - n$.
On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n + 2\,n^2 + 3\,n + 5$.

1. Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			
8			
9			
10			

Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

Partie A

Un astronome responsable d'un club d'astronomie a observé le ciel un soir d'août 2015 pour voir des étoiles filantes. Il a effectué des relevés du temps d'attente entre deux apparitions d'étoiles filantes. Il a alors modélisé ce temps d'attente, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. En exploitant les données obtenues, il a établi que $\lambda = 0{,}2$.
Il prévoit d'emmener un groupe de nouveaux adhérents de son club lors du mois d'août 2016 pour observer des étoiles filantes. Il suppose qu'il sera dans des conditions d'observation analogues à celles d'août 2015.
L'astronome veut s'assurer que le groupe ne s'ennuiera pas et décide de faire quelques calculs de probabilités dont les résultats serviront à animer la discussion.

1. Lorsque le groupe voit une étoile filante, vérifier que la probabilité qu'il attende moins de 3 minutes pour voir l'étoile filante suivante est environ 0,451.

2. Lorsque le groupe voit une étoile filante, quelle durée minimale doit-il attendre pour voir la suivante avec une probabilité supérieure à 0,95 ? Arrondir ce temps à la minute près.

3. L'astronome a prévu une sortie de deux heures. Estimer le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes lors de cette sortie.

Partie B

Ce responsable adresse un questionnaire à ses adhérents pour mieux les connaître.
Il obtient les informations suivantes :

- 64 % des personnes interrogées sont des nouveaux adhérents ;
- 27 % des personnes interrogées sont des anciens adhérents qui possèdent un télescope personnel ;
- 65 % des nouveaux adhérents n'ont pas de télescope personnel.

1. On choisit un adhérent au hasard. Montrer que la probabilité que cet adhérent possède un télescope personnel est 0,494.

2. On choisit au hasard un adhérent parmi ceux qui possèdent un télescope personnel. Quelle est la probabilité que ce soit un nouvel adhérent ? Arrondir à 10^{-3} près.

Partie C

Pour des raisons pratiques, l'astronome responsable du club souhaiterait installer un site d'observation sur les hauteurs d'une petite ville de 2 500 habitants. Mais la pollution lumineuse due à l'éclairage public nuit à la qualité des observations. Pour tenter de convaincre la mairie de couper l'éclairage nocturne pendant les nuits d'observation, l'astronome réalise un sondage aléatoire auprès de 100 habitants et obtient 54 avis favorables à la coupure de l'éclairage nocturne.
L'astronome fait l'hypothèse que 50 % de la population du village est favorable à la coupure de l'éclairage nocturne. Le résultat de ce sondage l'amène-t-il à changer d'avis ?

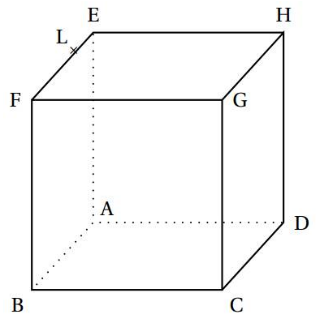
EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'*est pas prise en compte. Une absence de réponse* n'*est pas pénalisée.*

1. **Proposition 1 :**
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{2} + 3\,i$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = -4\,i$ ne sont pas alignés.

2. Proposition 2 :
Il n'existe pas d'entier naturel n non nul tel que $[i\,(1+i)]^{2n}$ soit un réel strictement positif.

3. ABCDEFGH est un cube de côté 1. Le point L est tel que $\overrightarrow{EL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$.



Proposition 3 :
La section du cube par le plan (BDL) est un triangle.
Proposition 4 :
Le triangle DBL est rectangle en B.

4. On considère la fonction f définie sur l'intervalle [2 ; 5] et dont on connaît le tableau de variations donné ci-dessous :

x	2	3	4	5
Variations de f	3 ↘	0 ↗	1 ↗	2

Proposition 5 :
L'intégrale $\int_2^5 f(x)\,dx$ est comprise entre 1,5 et 6.

EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'*est pas prise en compte. Une absence de réponse* n'*est pas pénalisée.*

1. **Proposition 1**
Pour tout entier naturel n, le chiffre des unités de $n^2 + n$ n'est jamais égal à 4.

2. On considère la suite u définie, pour $n \geq 1$, par $u_n = \frac{1}{n}\,\text{pgcd}(20\,;\,n)$.

Proposition 2
La suite (u_n) est convergente.

3. Proposition 3
Pour toutes matrices A et B carrées de dimension 2, on a $A \times B = B \times A$.

4. Un mobile peut occuper deux positions A et B. À chaque étape, il peut soit rester dans la position dans laquelle il se trouve, soit en changer.
Pour tout entier naturel n, on note :
— A_n l'évènement « le mobile se trouve dans la position a à l'étape n » et a_n sa probabilité.
— B_n l'évènement « le mobile se trouve dans la position B à l'étape n » et b_n sa probabilité.
— X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

On admet que, pour tout entier nature n, $X_{n+1} = M \times X_n$ avec $M = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

Proposition 4
La probabilité $P_{A_n}(B_{n+1})$ vaut 0,45.

Proposition 5
Il existe un état initial $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ tel que la probabilité d'être en B à l'étape 1 est trois fois plus grande que celle d'être en A à l'étape 1, autrement dit tel que $b_1 = 3\,a_1$.

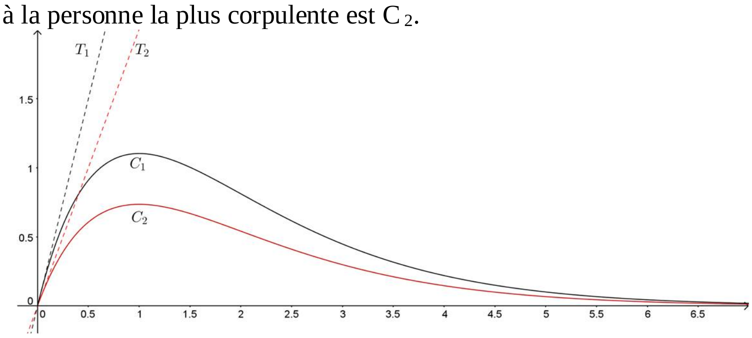
CORRECTION

EXERCICE 1 7 points Commun à tous les candidats

Partie A

1. C'(a) est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a à la courbe donc ce coefficient est maximal à l'origine donc pour $a = 0$.

2. Sur le graphique, la tangente à l'origine à la courbe C_1 a un coefficient directeur supérieur à celui de la tangente à l'origine à C_2 donc la courbe correspondant à la personne la plus corpulente est C_2.



3. *a.* Soit $\begin{cases} u(t) = A\,t & u'(t) = A \\ v(t) = e^{-t} & v'(t) = -e^{-t} \end{cases}$ donc $f'(t) = A\,e^{-t} - A\,t\,e^{-t}$ donc $f'(0) = A$.

b. Une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool donc plus la personne est de faible corpulence plus $f'(0)$ est grand donc à quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, moins la personne est corpulente, l'affirmation est fausse.

Partie B - Un cas particulier

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 2\,t\,e^{-t}$.

1. D'après les résultats précédents, $f'(t) = 2\,e^{-t} - 2\,t\,e^{-t} = 2\,(1 - t)\,e^{-t}$.

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	+		
Variations de f	0 ↗	$2\,e^{-1}$	↘ 0

2. La concentration d'alcool dans le sang de Paul est maximale pour $t = 1$ soit au bout d'une heure. Cette concentration est alors égale à 0,74

3. $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$ or $t\,e^{-t} = \dfrac{1}{\frac{1}{t}\,e^t}$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} t\,e^{-t} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

A la longue, la concentration d'alcool dans le sang devient nulle.

4. Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture.

On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de 0,2 $g.L^{-1}$ pour un jeune conducteur.

a. La fonction f est définie continue strictement croissante sur $[0 ; 1]$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 2\,e^{-1}$ donc $f(1) \approx 0{,}74$

$f(0) \leq 0{,}2 \leq f(1)$ donc l'équation $f(t) = 0{,}2$ admet une seule solution t_1 sur $[0 ; 1]$.

La fonction f est définie continue strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$, $f(1) = 2\,e^{-1}$ donc $f(1) \approx 0{,}74$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) \leq 0{,}2 \leq f(1)$ donc l'équation $f(t) = 0{,}2$ admet une seule solution t_2 sur $[1 ; +\infty[$.

Il existe donc deux nombres réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 0{,}2$.

b. En utilisant la fonction TABL de la calculatrice avec un pas de $\dfrac{1}{60}$ (une minute) :

$0{,}1 \leq t_1 \leq 0{,}117$ donc soit entre 6 et 7 minutes après avoir bu, le taux d'alcoolémie de Paul dépasse 0,2, il ne peut pas conduire.

$f(3{,}58) \leq 0{,}2 \leq f(3{,}56)$ soit $3{,}56 \leq t_2 \leq 3{,}58$ (t_2 est exprimé en heures) donc t_2 est compris entre 214 minutes et 215 minutes soit 3 h 5 minutes

Paul doit attendre au moins 3 h 5 minutes avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité.

5. *a.* La fonction f est définie continue strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$, $f(1) = 2\,e^{-1}$ donc $f(1) \approx 0{,}74$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) \leq 5 \times 10^{-3} \leq f(1)$ donc l'équation $f(t) = 5 \times 10^{-3}$ admet une seule solution T sur $[1 ; +\infty[$.

La fonction f est strictement décroissante sur $[1 ; +\infty[$, donc si $t \geq$ T alors $f(t) \leq 5 \times 10^{-3}$

Il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

b. La valeur affichée par cet algorithme représente le temps minimal à partir duquel le taux d'alcoolémie n'est plus détectable.

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25		
t	3,5	3,75	3,75
C	0,21	0,18	0,18
Test $C > 5 \times 10^{-3}$	Vrai	Vrai	Vrai

EXERCICE 2 3 points Commun à tous les candidats

1. En C2, on a écrit $\boxed{= B2 + 2 * A2\hat{}2 + 3 * A2 + 6}$

En B3, on a écrit $\boxed{= 2 B2 + 2 * A3\hat{}2 - A3}$

2. $v_{n+1} = u_{n+1} + 2(n+1)^2 + 3(n+1) + 5$ $v_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n + 2n^2 + 4n + 2 + 3n + 3 + 5$
$v_{n+1} = 2u_n + 4n^2 + 6n + 10 = 2(u_n + 2n^2 + 3n + 5)$ or $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$ donc $v_{n+1} = 2v_n$
La suite (v_n) est géométrique de raison 2 de premier terme $v_0 = 7$ donc $v_n = q^n v_0 = 7 \times 2^n$

$v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$ donc $u_n = v_n - 2n^2 - 3n - 5$ donc $u_n = 7 \times 2^n - 2n^2 - 3n - 5$

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

Partie A

1. T suit une loi exponentielle de paramètre λ donc $P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$ et $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
$P(T \leq 3) = 1 - e^{-3\lambda} = 1 - e^{-0,6} = 0,451$

2. Lorsque le groupe voit une étoile filante, quelle durée minimale doit-il attendre pour voir la suivante avec une probabilité supérieure à 0,95 ? Arrondir ce temps à la minute près.

$P(T \leq t) \geq 0,95 \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda t} \geq 0,95 \Leftrightarrow \lambda t \geq \ln 0,05 \Leftrightarrow t \geq \dfrac{\ln 0,05}{-0,2}$

$\dfrac{\ln 0,05}{-0,2} \approx 1,4,98$ donc on doit attendre au moins 15 minutes

3. Le temps d'attente moyen entre deux apparitions d'étoiles filantes est $\dfrac{1}{\lambda}$ soit 10 minutes

En 10 minutes, on a en moyenne 10 étoiles filantes donc en deux heures le nombre moyen d'étoiles filantes lors de cette sortie est $\dfrac{120}{10} = 12$ étoiles filantes.

Partie B

Soit les événements : T : « l'adhérent a un télescope personnel » ;
N : « l'adhérent est un nouvel adhérent »
A : « l'adhérent est un ancien adhérent »

1. la probabilité que cet adhérent possède un télescope personnel est $P(N \cap T) + P(A \cap T) = 0,64 \times 0,35 + 0,27 = 0,494$.

2. $P(T) = 0,494$ et $P(N \cap T) = 0,224$ donc $P_T(N) = \dfrac{P(T \cap N)}{P(N)}\ \dfrac{0,224}{0,494} \approx 0,453$

La probabilité que ce soit un nouvel adhérent sachant qu'il possède un télescope personnel est 0,453

Partie C

$n = 100$ donc $n \geq 30$, $p = 0,5$ donc $n\,p \geq 5$ et $n\,(1 - p) \geq 5$
Les conditions sont vérifiées pour pouvoir utiliser un intervalle de fluctuation.

$I = \left[\ p - 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p - 1,96\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\ \right]$ donc I = [0,402 ; 0,598]

Dans l'échantillon utilisé, $f = 0,54$ donc $f \in I$ donc le résultat de ce sondage ne fera pas changer d'avis.

EXERCICE 4 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Proposition 1 : VRAIE

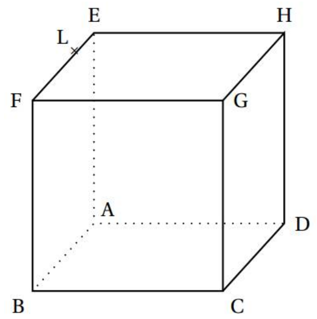
$\overrightarrow{CA}$ a pour affixe $\sqrt{2} + 7\,i$, et $\overrightarrow{CB}$ a pour affixe $1 + 5\,i$ donc les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ ont pour coordonnées ($\sqrt{2}$; 7) et (1 ; 5)

$\sqrt{2} \times 5 - 7 \times 1 \neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ ne sont pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Proposition 2 : FAUSSE

$[i\,(1+i)]^2 = i^2 \times (1+i)^2 = -2\,i$ donc $\left([\,i\,(1+i)]^2\right)^4 = (-2\,i) = 2^4 = 16$, si $n = 4$ alors $[i\,(1+i)]^{2n}$ est un réel strictement positif.

3. ABCDEFGH est un cube de côté 1. Le point L est tel que $\overrightarrow{EL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$.



Proposition 3 : FAUSSE

Le plan (BDL) coupe le plan (ABC) suivant la droite (BD) donc il coupe le plan (EFG) suivant une droite parallèle passant par L
La section du cube par le plan (BDL) est un trapèze.

Proposition 4 : FAUSSE

$\overrightarrow{EL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$ donc dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, L a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;0\,;1\right)$ donc $\overrightarrow{BL}\left(\frac{1}{3}-1\,;0\,;1\right)$ soit $\left(-\frac{2}{3}\,;0\,;1\right)$

$\overrightarrow{BD}(-1\,;1\,;0)$ donc $\overrightarrow{BL}.\overrightarrow{BD} = -\frac{2}{3}\times(-1) + 1\times 0 + 0\times 1 = \frac{2}{3}$

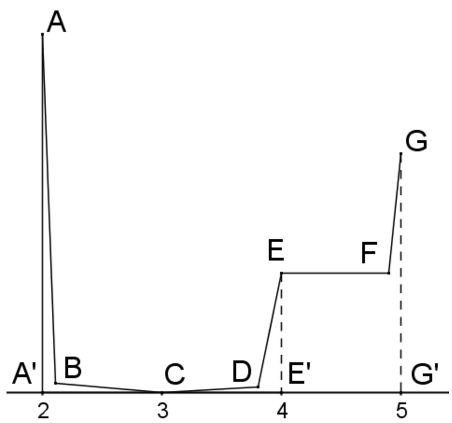
les deux vecteurs ne sont pas orthogonaux donc le triangle DBL n'est pas rectangle en B.

4. On considère la fonction f définie sur l'intervalle [2 ; 5] et dont on connaît le tableau de variations donné ci-dessous :

x	2	3	4	5
Variations de f	3 ↘	0 ↗	1 ↗	2

Proposition 5 : FAUSSE

En choisissant B (2,000 001 ; 0,000 001), D(3,000 001 ; 0,000 001) F(4,999 999 ; 1,000 001) la ligne brisée ABCDEFG vérifie l'hypothèse et $\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}\,x$ est approximativement l'aire de EE'G'G donc est voisine de 1 donc n'est pas comprise entre 1,5 et 6.



EXERCICE 4 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Proposition 1 VRAIE

Si le chiffre des unités de $n^2 + n$ est égal à 4 alors il existe un entier naturel k tel que $n^2 + n = 10k + 4$ soit $n^2 + n \equiv 4$ modulo 10

n est congru modulo 10 à	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2 est congru modulo 10 à	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$n^2 + n$ est congru modulo 10 à	0	2	6	2	0	0	2	6	2	0

On n'a jamais $n^2 + n \equiv 4$ modulo 10 donc le chiffre des unités de $n^2 + n$ n'est jamais égal à 4.

2. Proposition 2 VRAIE

$20 = 2^2 \times 5$ donc pgcd $(20 ; n) \in \{1 ; 2 ; 4 ; 5\}$ donc $1 \leq$ pgcd $(20 ; n) \leq 5$ donc $\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{5}{n}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{5}{n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. La suite (u_n) est convergente.

3. Proposition 3 FAUSSE

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on n'a pas $A \times B = B \times A$.

4. Proposition 4 VRAIE

Pour tout entier nature n, $X_{n+1} = M \times X_n$ avec $M = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ donc $X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}3 \\ 0{,}45 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0{,}55\, a_n + 0{,}3\, b_n \\ 0{,}45\, a_n + 0{,}7\, b_n \end{pmatrix}$

$\mathrm{P}(B_{n+1}) = P_{A_n}(B_{n+1})\,\mathrm{P}(A_n) + P_{B_n}(B_{n+1})\,\mathrm{P}(B_n) = P_{A_n}(B_{n+1})\, a_n + P_{B_n}(B_{n+1})\, b_n$ par comparaison : $P_{A_n}(B_{n+1}) = 0{,}45$.

Proposition 5 FAUSSE

$b_1 = 0{,}55\, a_0 + 0{,}3\, b_0$ et $a_1 = 0{,}45\, a_0 + 0{,}7\, b_0$ avec $a_0 + b_0 = 1$ et $a_0 \geq 0$ et $b_0 \geq 0$

$b_1 = 3\, a_1$ donc $0{,}55\, a_0 + 0{,}3\, b_0 = 3\,(0{,}45\, a_0 + 0{,}7\, b_0)$ soit $0{,}8\, a_0 + 1{,}8\, b_0 = 0$ donc $0{,}8\, a_0 = -1{,}8\, b_0$

$a_0 \geq 0$ et $b_0 \geq 0$ donc il est impossible d'avoir $0{,}8\, a_0 = -1{,}8\, b_0$

Il n'existe pas d'état initial $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ tel que la probabilité d'être en B à l'étape 1 est trois fois plus grande que celle d'être en A à l'étape 1.