Amérique du Nord juin 2016

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère le point A d'affixe 4, le point B d'affixe 4 i et les points C et D tels que ABCD est un carré de centre O.

Pour tout entier naturel non nul n, on appelle M_n le point d'affixe $z_n = (1 + i)^n$.

1. Écrire le nombre 1 + i sous forme exponentielle.

2. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, que l'on précisera, tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD.

CORRECTION

1. $|1 + i| = \sqrt{2}$ donc $\arg(1 + i) = \dfrac{\pi}{4}$ et $1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2. $z_n = \sqrt{2}^n\, e^{in\frac{\pi}{4}}$, tout nombre entier s'écrit $n = 4k + r$ avec $0 \leq r \leq 3$ donc $z_n = \sqrt{2}^n\, e^{i\left(k\pi + \frac{r\pi}{4}\right)}$

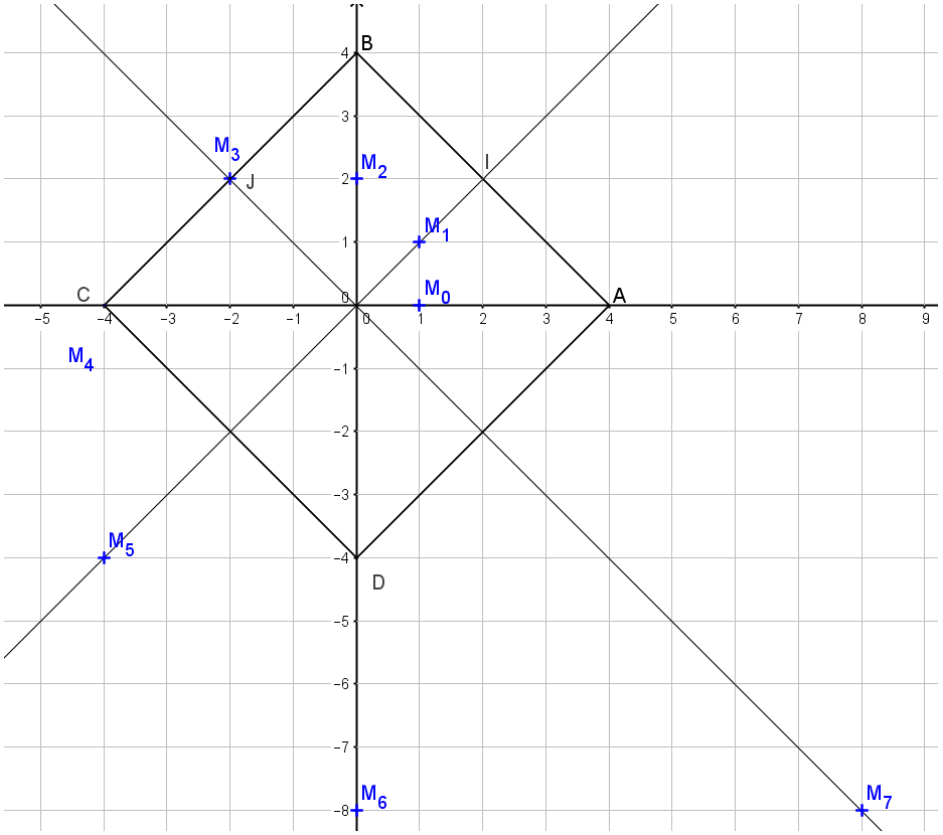
si $n = 4k$, $z_n = \sqrt{2}^n\, e^{ik\pi}$, le point M_n appartient à l'axe des abscisses donc est à l'extérieur du carré si $OM_n \geq 4$ soit $\sqrt{2}^n > 4$ soit $n > 4$

Le milieu de [AB] est le point I d'affixe 2 + 2 i donc $OI = |2 + 2i| = 2\sqrt{2}$

si $n = 4k + 1$, $z_n = \sqrt{2}^n\, e^{i\left(k\pi + \frac{\pi}{4}\right)}$, le point M_n appartient à la droite d'équation $y = x$ donc est à l'extérieur du carré si $OM_n > 2\sqrt{2}$ soit $\sqrt{2}^n > 2$ soit $n > 3$

si $n = 4k + 2$, $\sqrt{2}^n\, e^{i\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)}$, le point M_n appartient à l'axe des ordonnées donc est à l'extérieur du carré si $OM_n \geq 4$ soit $\sqrt{2}^n > 4$ soit $n > 4$

Le milieu de [BC] est le point J d'affixe – 2 + 2 i donc $OJ = |-2 + 2i| = 2\sqrt{2}$

si $n = 4k + 3$, $\sqrt{2}^n\, e^{i\left(k\pi + \frac{3\pi}{4}\right)}$, le point M_n appartient à d'équation $y = -x$ donc est à l'extérieur du carré si $OM_n > 2\sqrt{2}$ soit $\sqrt{2}^n > 2$ soit $n > 3$

Dans tous les cas si $n > 4$, pour tout entier $n \geq 4$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD donc $n_0 = 5$.