LIBAN juin 2016

EXERCICE 3 (4 points) Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par : $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1-x}}$

Partie A

1. Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 1]
2. Démontrer que pour tout réel de l'intervalle [0 ; 1], $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}}$ (on rappelle que e = e^{1}).
3. Montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\ln(2)+1-\ln(1+\mathrm{e})$.

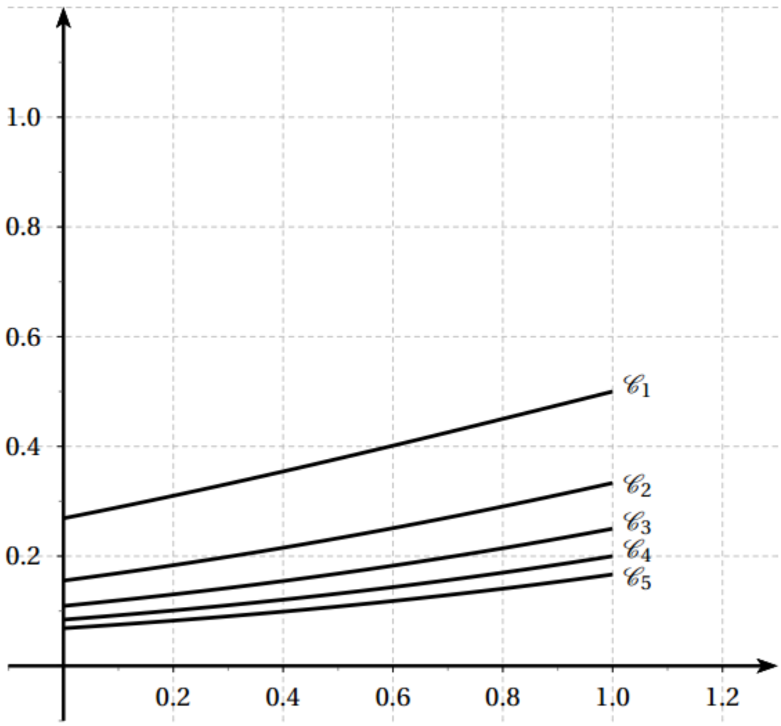
Partie B

Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur [0 ; 1] par : $f_n(x)=\dfrac{1}{1+n\,\mathrm{e}^{1-x}}$.

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On considère la suite de terme général $u_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. On a tracé en annexe les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5.
Compléter le graphique en traçant la courbe C_0 représentative de la fonction f_0.
2. Soit n un entier naturel, interpréter graphiquement u_n et préciser la valeur de u_0.
3. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite (u_n) ? Démontrer cette conjecture.
4. La suite (u_n) admet-elle une limite ?



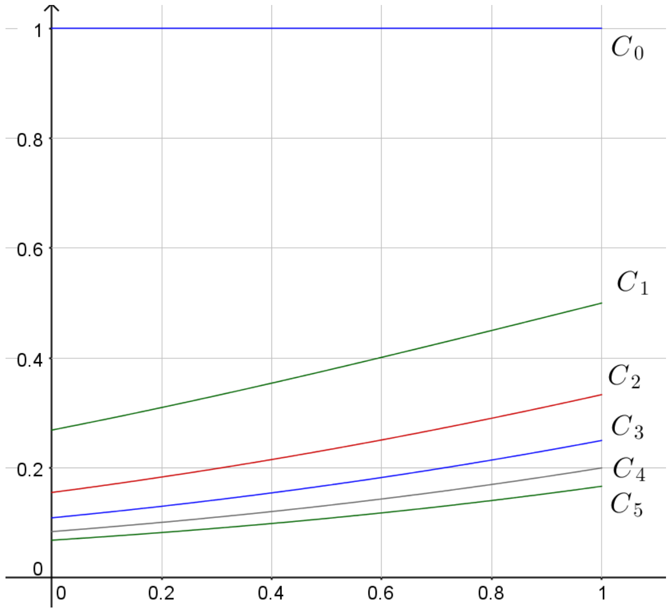
CORRECTION

Partie A

1. La dérivée de e^{1-x} est $-\mathrm{e}^{1-x}$ donc $f'(x)=-\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}=\dfrac{\mathrm{e}^{1-x}}{(1+\mathrm{e}^{1-x})^2}$ donc $f'(x)>0$, f est croissante sur [0 ; 1].
2. $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1-x}}=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}(1+\mathrm{e}^{1-x})}=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}}$.
3. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\Big[\ln(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e})\Big]_0^1=\ln(2\,\mathrm{e})-\ln(1+\mathrm{e})=\ln 2+\ln\mathrm{e}-\ln(1+\mathrm{e})$ donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\ln(2)+1-\ln(1+\mathrm{e})$.

Partie B

1.



2. Soit n un entier naturel, u_n est l'aire du domaine limité par la courbe C_n l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ et $u_0 = 1$

3. Graphiquement, on peut supposer que la suite (u_n) est décroissante.

$n + 1 > n$, $e^{1-x} > 0$ donc $1 + (n + 1)\, e^{1-x} > 1 + n\, e^{1-x} > 0$ donc $\dfrac{1}{1+(n+1)\,e^{1-x}} < \dfrac{1}{1+n\,e^{1-x}}$ donc $u_{n+1} < u_n$, la suite (u_n) est décroissante.

4. *P*our tout x de $[0 ; 1]$, $1 \leq e^{1-x} < e$ donc, $1 + n \leq 1 + n\, e^{1-x} \leq 1 + n\, e$ donc en passant aux inverses : $\dfrac{1}{1+n} \leq \dfrac{1}{1+n\,e^{1-x}} \leq \dfrac{1}{1+n\,e}$

donc

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+n}\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+n\,e^{1-x}}\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{1+n\,e}\,dx$ soit $\displaystyle\frac{1}{1+n}\int_0^1 dx \leq u_n \leq \frac{1}{1+n\,e}\int_0^1 dx$

$\displaystyle\int_0^1 dx = 1$ donc $\displaystyle\frac{1}{1+n} \leq u_n \leq \frac{1}{1+n\,e}$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+n\,e} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$