Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = 6 - \dfrac{5}{x+1}$.

Le but de cet exercice est d'étudier des suites (u_n) définies par un premier terme positif ou nul u_0 et vérifiant pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Étude de propriétés de la fonction f.

a) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

b) Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ l'équation $f(x) = x$. On note α la solution.

c) Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0, \alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0, \alpha]$.
De même, montrer que si x appartient à l'intervalle $[\alpha\ ;+\infty[$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[\alpha\ ;+\infty[$.

2, Étude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$

Dans cette question, on considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \dfrac{5}{u_n+1}$.

a) Sur le graphique, représenté dans l'annexe 2, sont représentées les courbes d'équations $y = x$ et $y = f(x)$.
Placer le point A_0 de coordonnées $(u_0\ ; 0)$, et en utilisant ces courbes, construire à partir de A_0 les points A_1, A_2, A_3 et A_4 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et u_4.
Quelles conjectures peut-on émettre quant au sens de variation et à la convergence de la suite (u_n) ?

b) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Étude des suites (u_n) selon, les valeurs du réel positif ou nul u_0.

Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

Que peut-on dire du sens de variation et de la convergence de la suite (u_n) suivant les valeurs du réel positif ou nul u_0 ?

CORRECTION

1. *a*) $f'(x) = \dfrac{5}{(x+1)^2}$ donc $f'(x) > 0$ sur $[0\ ;+\infty[$ donc f est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$.

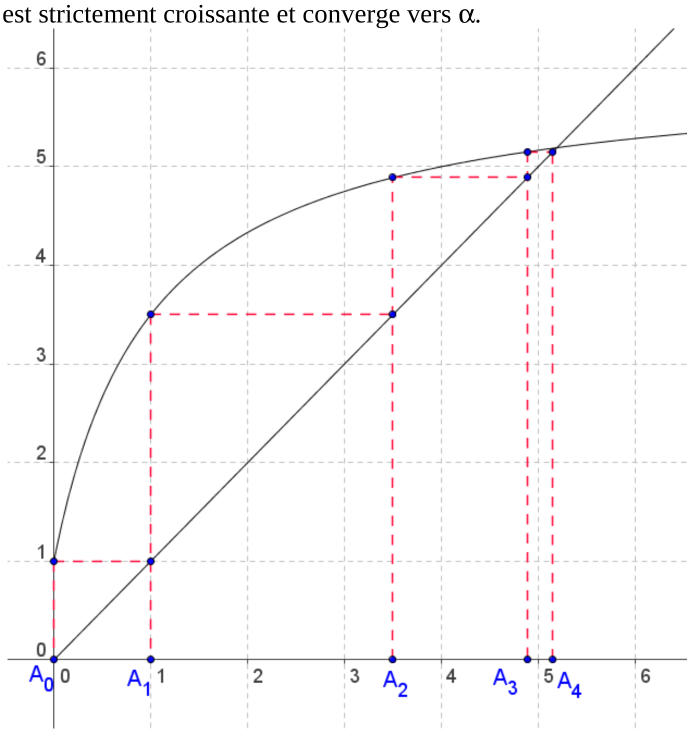
b) dans l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ $f(x) = x \Leftrightarrow x \ge 0$ et $6 - \dfrac{5}{x+1} = x \Leftrightarrow x \ge 0$ et $6(x+1) - 5 = x(x+1) \Leftrightarrow x \ge 0$ et $x^2 - 5x - 1 = 0$

$\Delta = 25 + 4 = 29$ donc $x^2 - 5x - 1 = 0$ admet deux solutions $\beta = \dfrac{5-\sqrt{29}}{2}$ et $\alpha = \dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$

or $\alpha > 5$ et $\beta < 0$ donc dans l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ $f(x) = x \Leftrightarrow x = \dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$.

c) f est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$ donc si $0 \le x \le \alpha$ alors $f(0) \le f(x) \le f(\alpha)$ soit $1 \le f(x) \le \alpha$ (puisque $f(\alpha) = \alpha$)
si x appartient à l'intervalle $[0, \alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0, \alpha]$.

2. *a*) Apparemment la suite (u_n) est strictement croissante et converge vers α.



b) $u_0 = 0$ donc $u_1 = f(0) = 1$ donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$. La propriété est vraie pour $n = 0$

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$ si : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ alors $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$.

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ or la fonction f est croissante sur $[0 ; \alpha]$ donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\alpha)$
or $f(0) = 0$ et $f(\alpha) = \alpha$ donc $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$.

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

c) La suite (u_n) est croissante, majorée par α donc est convergente vers un réel ℓ.
La fonction f est continue sur $[0 ; \alpha]$, $u_{n+1} = f(u_n)$ donc ℓ vérifie : $f(\ell) = \ell$
L'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α sur $[0 ; +\infty[$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

3. Graphiquement : si $u_0 \in [0 ; \alpha[$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge vers α.

si $u_0 \in [\alpha ; +\infty[$ la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers α.

Pour le démontrer :

$f(x) - x = 6 - \dfrac{5}{x+1} - x = \dfrac{(6-x)(x+1)-5}{x+1} = \dfrac{-x^2+5x+1}{x+1}$ soit $f(x) - x = \dfrac{-(x-\alpha)(x-\beta)}{x+1}$ d'après la question 1. *b*.

Pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $x - \beta > 0$ et $x + 1 > 0$ donc $6 - \dfrac{5}{x+1} - x$ *a* le même signe que $-(x-\alpha)$

x	0		α		$+\infty$
$f(x) - x$		+	0	–	

donc si $u_0 \in [0 ; \alpha[$, alors $f(u_0) \in [0 ; \alpha[$ donc $u_1 \leq \alpha$ et $f(u_0) - u_0 > 0$ donc $0 \leq u_0 < u_1 \leq \alpha$
La propriété est vraie pour $n = 0$

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$ si : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ alors $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$.

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ or la fonction f est croissante sur $[0 ; \alpha]$:
$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\alpha)$
or $f(0) = 0$ et $f(\alpha) = \alpha$ donc $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$.

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

de même si $u_0 \in [\alpha ; +\infty[$, $u_1 = f(u_0)$ donc $u_1 \geq \alpha$ et $f(u_0) - u_0 < 0$ donc $u_1 < u_0$ soit $0 \leq u_0 < u_1 \leq \alpha$
Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n$. La propriété est vraie pour $n = 0$

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$ si : $\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n$ alors $\alpha \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

$\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n$ or la fonction f est croissante sur $[0 ; \alpha]$ donc $f(\alpha) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$
or $f(\alpha) = \alpha$ donc $\alpha \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

La suite est soit décroissant et minorée par α soit croissante et majorée par α donc dans tous les cas, est convergente vers un réel ℓ.

La suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ.
La fonction f est continue sur $[0 ; \alpha]$, $u_{n+1} = f(u_n)$ donc ℓ vérifie : $f(\ell) = \ell$
L'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α sur $[0 ; +\infty[$ donc dans tous les cas, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$