Exercice 1

1. $\int_0^1 x^2+5x+2dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x+2x\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{5}{2}+2-(0)=\frac{29}{6}$

2. $\int_0^1 dx=[x]_0^1=1$

3. $\int_1^2 \frac{1}{t^2}dt=\left[-\frac{1}{t}\right]_1^2=-\frac{1}{2}-(-1)=\frac{1}{2}$

4. $\int_1^3 \frac{x+1}{(x^2+2x)^3}dx=\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^3}dx=\frac{1}{2}\int_1^3 u'(x)u^{-3}(x)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{u^{-2}(x)}{-2}\right]_1^3=-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(x^2+2x)^2}\right]_1^3=\frac{2}{75}$

   Avec $u(x)=x^2+2x$ et $u'(x)=2x+2=2(x+1)$

5. $\int_1^2 \frac{x+1}{(x^2+2x)}dx=\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2(x+1)}{(x^2+2x)}dx=\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{u'(x)}{u(x)}dx=\frac{1}{2}[\ln(u(x))]_1^2=\frac{1}{2}[\ln(x^2+2x)]_1^2=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{3}\right)$

   Avec $u(x)=x^2+2x$ et $u'(x)=2x+2=2(x+1)$

6. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}dx=\int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)}dx=[\ln(u(x))]_0^1=\left[\ln(e^x+2)\right]_0^1=\ln(e+2)-\ln(3)=\ln\left(\frac{e+1}{3}\right)$

   Avec $u(x)=e^x+2$ et $u'(x)=e^x$

7. $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{t}}dt=2\int_4^9 \frac{1}{2\sqrt{t}}dt=2\left[\sqrt{t}\right]_4^9=2$

8. $\int_0^2 6t(t^2+1)^2dt=3\int_0^2 2t(t^2+1)^2dt=3\int_0^2 u'(t)u^2(t)dt=3\left[\frac{u^3(t)}{3}\right]_0^2=\left[(t^2+1)^3\right]_0^2=124$

   Avec $u(t)=t^2+1$ et $u'(t)=2t$

9. $\int_0^1 e^{-0,5x}dx=\frac{1}{-0,5}\int_0^1 -0,5e^{-0,5x}dx=-2\int_0^1 u'(x)e^{u(x)}dx=-2\left[e^{-0,5x}\right]_0^1=-2(e^{-0,5}-1)$

   Avec $u(x)=-0,5x$ et $u'(x)=-0,5$

10. $\int_{-1}^1 \frac{5}{e^t}dt=-5\int_{-1}^1(-e^{-t})dt=-5\int_{-1}^1 u'(t)e^{u(t)}dt=-5\left[e^{-t}\right]_{-1}^1=5(e-e^{-1})$

    Avec $u(t)=-t$ et $u'(t)=-1$

11. $\int_0^4 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt=\int_0^4 \frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}dt=\int_0^4 \frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}}dt=\left[\sqrt{u(t)}\right]_0^4=\left[\sqrt{t^2+1}\right]_0^4=\sqrt{17}-1$

    Avec $u(t)=t^2+1$ et $u'(t)=2t$

12. $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\int_1^e \ln x\times\frac{1}{x}dx=\int_1^e u(x)\times u'(x)dx=\frac{1}{2}[u^2(x)]_1^e=\frac{1}{2}[\ln^2(x)]_1^e=\frac{1}{2}$

    Avec $u(x)=\ln(x)$ et $u'(x)=\frac{1}{x}$

Exercice 2

Pour tout réel x, $F'(x)=\frac{a(x^2+x+2)-(ax+b)(2x+1)}{(x^2+x+2)^2}=\frac{-ax^2-2bx+2a-b}{(x^2+x+2)^2}$

Par identification, on trouve que a et b satisfont à : $-a=1$, $-2b=4$ et $2a-b=0$

Il en résulte que $a=-1$ et $b=-2$

Conclusion : Pour tout réel x, $F(x)=\frac{-x-2}{x^2+x+2}$

F représente une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

En conséquence, $\int_0^1 f(x)dx=[F(x)]_0^1=F(1)-F(0)=\frac{-3}{4}-\frac{-2}{2}=\frac{1}{4}$

Exercice 3

Pour tout réel t, $F'(t) = a\,e^{-t} + (a\,t + b)(-e^{-t}) = e^{-t}(-a\,t + a - b)$
On remarque que pour $a = -1$ et $b = -1$, on a pour tout réel t, $F'(t) = te^{-t}$
Conclusion:

$F : t \mapsto (-t-1)\,e^{-t}$ est une primitive de $t \mapsto t\,e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$

Par suite, $\quad \mathrm{I} = \int_0^1 te^{-t}dt = [F(t)]_0^1 = F(1) - F(0) = -2e^{-1} - (-1) = 1 - \frac{2}{e}$

Exercice 4

La démarche ici est de chercher le signe de $x^2 - 1$
Or $\quad x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ ou $x \geq 1$
En conséquence, en utilisant la relation de Chasles , on a :

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}|x^2-1|\,dx &= \int_{-2}^{-1}|x^2-1|\,dx + \int_{-1}^{1}|x^2-1|\,dx + \int_{1}^{2}|x^2-1|\,dx\\ &= \int_{-2}^{-1}x^2-1dx + \int_{-1}^{1}1-x^2dx + \int_{1}^{2}x^2-1dx\\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-2}^{-1} + \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{1}^{2}\\ &= 4\end{aligned}$$

Pour $t > 0$, $1 - \frac{3}{t} \geq 0 \Leftrightarrow t - 3 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 3$

On a :

$$\int_1^7\left|1-\frac{3}{t}\right|dt = \int_1^3\left|1-\frac{3}{t}\right|dt + \int_3^7\left|1-\frac{3}{t}\right|dt = \int_1^3\frac{3}{t}-1dt + \int_3^7 1-\frac{3}{t}dt = [3\ln t - t]_1^3 + [t - 3\ln t]_3^7 = 6\ln 3 - 3\ln 7 + 2$$

Exercice 5.

1. $2I + 4J = \int_0^1 \frac{4}{1+t^2}dt + \int_0^1 \frac{4t^2}{1+t^2}dt = 4\int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^2}dt = 4\int_0^1 1dt = 4[t]_0^1 = 4$
2. Comme $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4}$ alors $I = \frac{\pi}{2}$.
3. Comme $2\,I + 4\,J = 4$ alors $J = \frac{4 - 2\,I}{4} = 1 - \frac{1}{2}I = 1 - \frac{\pi}{4}$

Exercice 6.

1. $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \frac{1}{2}[\ln u(x)]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2)$
2. $I + J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x(1+x^2)}{1+x^2}dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}[x^2]_0^1 = \frac{1}{2}$

   Par suite $J = \frac{1}{2} - \mathrm{I} = \frac{1}{2}(1 - \ln(2)) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e}{2}\right) = \ln\sqrt{\frac{e}{2}}$

Exercice 7

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 t^{n+1}e^t dt - \int_0^1 t^n e^t dt = \int_0^1 t^{n+1}e^t - t^n e^t dt = \int_0^1 t^n e^t(t-1)dt$

   Pour tout $t \in [0\,;1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t^n e^t \geq 0$ et $t - 1 \leq 0$ donc $t \mapsto t^n e^t(t-1)$ est négative sur $[0\,;1]$.

   Il en résulte alors que $\int_0^1 t^n e^t(t-1)dt \leq 0$

   Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n \leq 0$, en d'autres termes, la suite (I_n) est décroissante.

2. Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $t \in [0\,;1]$, on a :

$$0 \leq e^t \leq e$$
$$0 \leq t^n\, e^t \leq e\, t^n$$

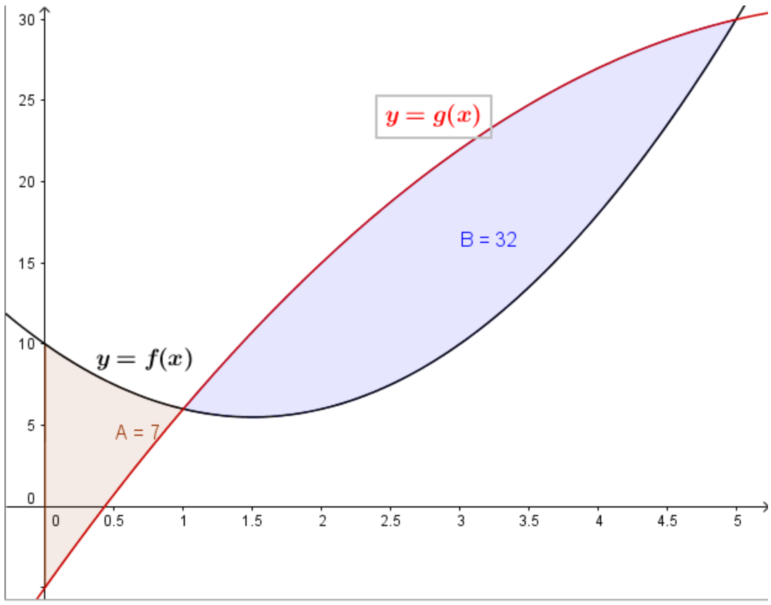
Par intégration sur [0 ;1], il vient que : $\int_0^1 0dt \leq \int_0^1 t^n e^t dt \leq \int_0^1 e t^n dt$

$$\text{Soit : } 0 \leq I_n \leq e\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \text{ ou encore } 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1}$, l'application du théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

Exercice 8

Etudions le signe de $h : x \mapsto f(x) - g(x)$
Pour tout réel x,
$f(x) - g(x)$
$= 2x^2 - 6x + 10 - (-x^2 + 12x - 5)$
$= 3x^2 - 18x + 15 = 3(x^2 - 6x + 5) = 3(x-1)(x-5)$
On en déduit que pour tout $x \in [1\,;5]$, $f(x) - g(x) \leq 0$
Et pour $x \in [0\,;1]$, $f(x) - g(x) \geq 0$
Il en résulte que l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les parabole P_f et P_g sur l'intervalle [0 ;5] est donnée par : $\int_0^5 |f(x) - g(x)|dx$



$$\begin{aligned}
\int_0^5 |f(x) - g(x)|dx &= \int_0^1 f(x) - g(x)dx + \int_1^5 g(x) - f(x)dx \\
&= 3\int_0^1 x^2 - 6x + 5dx + 3\int_1^5 -x^2 + 6x - 5dx \\
&= 3\left(\left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right]_1^5\right) \\
&= 39 \text{ (en unité d'aires)}
\end{aligned}$$

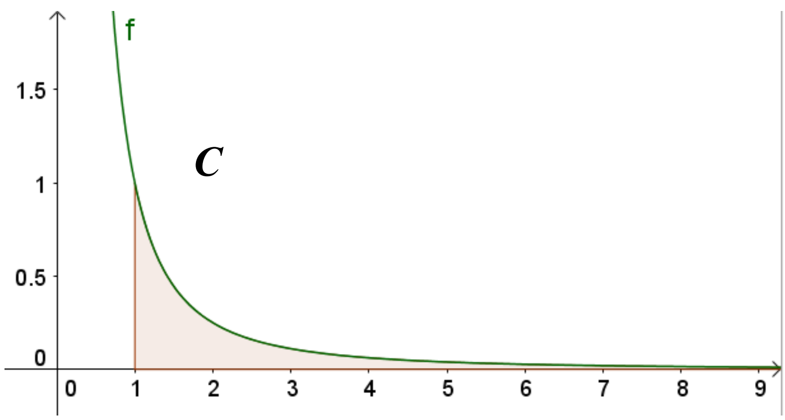
Comme 1 unité d'aire est égale à 0,7 × 0,8 cm² soit 5,6 cm²
On en déduit alors que l'aire recherchée est égale à 21,84 cm².

Exercice 9

1. Pour $a > 1$, $I(a) = \int_1^a \frac{1}{t^2}dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^a = 1 - \frac{1}{a}$

2. $\lim\limits_{a\to+\infty} \frac{1}{a} = 0$ donc $\lim\limits_{a\to+\infty} I(a) = 1$

3. Cela correspond à l'aire en unités d'aire, situé sous la courbe C sur $[1\,;+\infty[$.



Exercice 10.

1. Pour tout $t \in [1\ ;4]$, $g'(t) = 1 \times \sqrt{t} + t \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} + \frac{1}{2}\sqrt{t} = \frac{3}{2}\sqrt{t}$

   On en déduit alors que pour tout $t \in [1\ ;4]$, $\left(\frac{2}{3}g\right)'(t) = \sqrt{t}$

   Cela signifie que la fonction $t \mapsto \frac{2}{3}g(t)$ est une primitive de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[1\ ;4]$

   Par suite $F : t \mapsto \frac{2}{3}t\sqrt{t} - 0{,}2 \times \frac{t^4}{4} + \frac{5t^2}{2}$ ou encore $F : t \mapsto \frac{2}{3}t\sqrt{t} - \frac{1}{20}t^4 + \frac{5t^2}{2}$ est une primitive de f sur $[1\ ;4]$.

2. Soit t_m le temps moyen nécessaire pour parcourir les 6 kilomètres, entre 7 *h* et 10 *h* du matin.
   Alors :
   $t_m = \frac{1}{4-1}\int_1^4 f(t)dt = \frac{1}{3}(F(4) - F(1)) = \frac{1}{3}\left(\frac{488}{15} - \frac{187}{60}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{1765}{60} = \frac{1}{3} \times \frac{353}{12} = \frac{353}{36} \approx 9{,}8$

   Conclusion : le temps moyen pour parcourir les 6 kilomètres est de 10 minutes environ.