Pondichéry avril 2016

Partie A

On considère les matrices M de la forme M = $\begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, où a et b sont des nombres entiers.

Le nombre 3 a – 5 b est appelé le déterminant de M. On le note det (M).
Ainsi det(M) =3 a – 5 b.

1. Dans cette question on suppose que det(M) ≠ 0 et on pose N = $\dfrac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix}$.

Justifier que N est l'inverse de M.

2. On considère l'équation (E) : det(M) = 3.

On souhaite déterminer tous les couples d'entiers (a ; b) solutions de l'équation (E).

a. Vérifier que le couple (6 ; 3) est une solution de (E).

b. Montrer que le couple d'entiers (a ; b) est solution de (E) si et seulement si 3 (a – 6) = 5 (b – 3).

c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Partie B

1. On pose Q = $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

En utilisant la partie A. déterminer la matrice inverse de Q.

2. Codage avec la matrice Q

Pour coder un mot de deux lettres à l'aide de la matrice Q = $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ on utilise la procédure ci-après :

Étape 1 : On associe au mot la matrice X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 est l'entier correspondant à la première lettre du mot et x_2 l'entier correspondant à la deuxième lettre du mot selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Étape 2 : la matrice X est transformée en la matrice Y = $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que Y = Q X.

Étape 3 : La matrice Y est transformée en la matrice R = $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ telle que r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 est le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.

Étape 4 : À la matrice R = $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ on associe un mot de deux lettres selon le tableau de correspondance de l'étape I.

Exemple : JE → X = $\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$ → Y = $\begin{pmatrix} 66 \\ 57 \end{pmatrix}$ → R = $\begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix}$ → OF

Le mot JE est codé en le mot OF.
Coder le mot DO.

3. Procédure de décodage

On conserve les mêmes notations que pour le codage.
Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice Y telle que Y = Q X.

a. Démontrer que 3 X = 3 Q^{-1} Y puis que $\begin{cases} 3x_1 \equiv 3r_1 - 3r_2 \quad [26] \\ 3x_2 \equiv -5r_1 + 6r_2 \quad [26] \end{cases}$

b. En remarquant que 9 × 3 ≡ 1 [26], montrer que $\begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 \quad [26] \\ x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2 \quad [26] \end{cases}$

c. Décoder le mot SO.

CORRECTION

Partie A

1. $\begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-5b & 3b-3b \\ -5a+5a & -5b+3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-5b & 0 \\ 0 & -5b+3a \end{pmatrix}$

NM = $\dfrac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix} 3a-5b & 0 \\ 0 & -5b+3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc N est l'inverse de M.

2\. *a*. $3 \times 6 - 5 \times 3 = 18 - 15 = 3$ donc le couple (6 ; 3) est une solution de (E).

b. Le couple d'entiers (a ; b) est solution de (E) $\Leftrightarrow 3a - 5b = 3$ or $3 \times 6 - 5 \times 3 = 3 \Leftrightarrow 3a - 5b = 3 \times 6 - 5 \times 3$
$\Leftrightarrow 3a - 3 \times 6 - 5b + 5 \times 3 = 0 \Leftrightarrow 3(a-6) - 5(b-3) = 0 \Leftrightarrow 3(a-6) = 5(b-3)$.

c. Le couple d'entiers (a ; b) est solution de (E) $\Leftrightarrow 3(a-6) = 5(b-3)$.
5 divise $3(a-6)$ or 3 et 5 sont premiers entre eux donc 5 divise $a - 6$, il existe donc un entier k tel que $a - 6 = 5k$
En remplaçant dans $3(a-6) = 5(b-3)$ alors $3 \times 5k = 5(b-3)$ donc $b - 3 = 3k$
$a = 5k + 6$ et $b = 3k + 3$
Réciproquement : si $a = 5k + 6$ et $b = 3k + 3$ alors $3a - 5b = 15k + 18 - 15k - 15 = 3$ donc $(5k + 6 ; 3k + 3)$ est solution de (E)
Les solutions de (E) sont les couples $(5k + 6 ; 3k + 3)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Partie B

1. En posant $a = 6$ et $b = 3$ alors $3a - 5b = 3$ donc det(Q) = 3 donc $Q^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

2. **Codage avec la matrice Q**

D → 3 et O → 14 donc $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix}$ donc $Y = QX = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 57 \end{pmatrix}$

$60 \equiv 8 \quad [26]$ et $57 \equiv 5 \quad [26]$ donc $R = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$ or 8 → I et 5 → F donc DO est codé en IF.

3. Procédure de décodage

a. $Y = QX$ donc $3Q^{-1}Y = 3Q^{-1}QX$ soit $3Q^{-1}Y = 3\,\mathrm{Id}\,X = 3X$

$3X = 3Q^{-1}Y$ puis que $3Q^{-1}Y = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y_1 - 3y_2 \\ -5y_1 + 6y_2 \end{pmatrix}$ soit $\begin{cases} 3x_1 = 3y_1 - 3y_2 \\ 3x_2 = -5y_1 + 6y_2 \end{cases}$

or $y_1 \equiv r_1 \quad [26]$ et $y_2 \equiv r_2 \quad [26]$ donc $\begin{cases} 3x_1 \equiv 3r_1 - 3r_2 & [26] \\ 3x_2 \equiv -5r_1 + 6r_2 & [26] \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x_1 \equiv 3r_1 - 3r_2 & [26] \\ 3x_2 \equiv -5r_1 + 6r_2 & [26] \end{cases}$ donc $\begin{cases} 9 \times 3x_1 \equiv 9 \times 3(r_1 - r_2) & [26] \\ 9 \times 3x_2 \equiv 9 \times (-5r_1 + 6r_2) & [26] \end{cases}$ or $9 \times 3 \equiv 1 \quad [26]$

soit $\begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 & [26] \\ x_2 \equiv -45r_1 + 54r_2 & [26] \end{cases}$ or $-45 - 7 = -52$ donc $-45 \equiv 7 \quad [26]$ et $54 - 2 = 52$ donc $54 \equiv 2 \quad [26]$

donc $\begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 & [26] \\ x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2 & [26] \end{cases}$

c. S → 18 et G → 6 donc $R = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix}$ or $\begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 & [26] \\ x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2 & [26] \end{cases}$ soit $\begin{cases} x_1 \equiv 18 - 6 & [26] \\ x_2 \equiv 7 \times 18 + 2 \times 6 & [26] \end{cases}$

$0 \le x_1 < 26$ donc $x_1 = 12$
$7 \times 18 + 2 \times 6 \equiv 8 \quad [26]$ donc $x_2 \equiv 8 \quad [26]$ or $0 \le x_2 < 26$ donc $x_2 = 8$ donc SG est décodé en MI