Antilles-Guyane septembre 2007

ABC est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Soit t un nombre réel fixe et soient les points M, N et P, deux à deux distincts, définis par $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = t\,\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CP} = t\,\overrightarrow{CA}$.

Le but de l'exercice est de démontrer l'existence d'une unique similitude directe σ qui transforme les points A, B et C en respectivement M, N et P, et d'en préciser les éléments caractéristiques.

On munit le plan d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$ direct.

On note a, b, c, m, n et p, les affixes respectives des points A, B, C, M, N et P.

1. On rappelle que toute similitude conserve le barycentre.

a. Exprimer m, n et p en fonction de a, b, c et t.

b. En déduire que les deux triangles ABC et MNP ont même centre de gravité.
On notera G ce centre de gravité.

c. On suppose que σ existe. Déterminer l'image de G par σ.

2. On considère la rotation r de centre G et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

a. Vérifier que M est le barycentre du système de points $\{A(1-t)\,;\,B(t)\}$, et en déduire que $r(M) = N$.
On admet de même que $r(N) = P$ et $r(P) = M$.

b. Soit σ_1, la similitude directe de centre G de rapport $\dfrac{GM}{GA}$ et d'angle $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GM})$.
Montrer qu'elle transforme les points A, B et C en respectivement M, N et P.

c. Conclure sur l'existence et l'unicité de σ.

CORRECTION

1. *a.* $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ se traduit en termes d'affixes par : $m - a = t(b-a) \Leftrightarrow m = a + t(b-a) = (1-t)a + tb$

De même $\overrightarrow{BN} = t\,\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow n = (1-t)b + tc$ et $\overrightarrow{CP} = t\,\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow p = (1-t)c + ta$

b. G centre de gravité du triangle ABC a pour affixe $g = \dfrac{1}{3}(a+b+c)$

Or $m + n + p = (1-t)a + tb + (1-t)b + tc + (1-t)c + ta = a + b + c$

Le centre de gravité du triangle MNP a pour affixe $\dfrac{1}{3}(m+n+p) = \dfrac{1}{3}(a+b+c) = g$

Les deux triangles ABC et MNP ont même centre de gravité.

c. Les images respectives de A, B et C par σ sont M, N et P. Comme les similitudes conservent le barycentre, l'image par σ du centre de gravité du triangle ABC est le centre de gravité du triangle MNP donc σ(G) = G.

2. Soit la rotation r de centre G et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

a. $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (1-t)\,\overrightarrow{MA} + t\,\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ or $1 - t + t \neq 0$ donc M est le barycentre du système de points $\{(A\,;\,1-t)\,;\,(B\,;\,t)\}$.

De même $\overrightarrow{BN} = t\,\overrightarrow{BC}$ donc N est le barycentre du système de points $\{(B\,;\,1-t)\,;\,(C\,;\,t)\}$.
La rotation r transforme A en B, et B en C.
Une rotation conserve le barycentre, donc : $r(M)$ est barycentre du système $\{(B, 1-t)\,;\,(C, t)\}$ soit $r(M) = N$.

b. Soit σ_1, la similitude directe de centre G de rapport $\dfrac{GM}{GA}$ et d'angle $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GM})$.

σ_1, la similitude directe de centre G de rapport $\dfrac{GM}{GA}$ et d'angle $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GM})$ donc $GM = \dfrac{GM}{GA} \times GA$ donc $\sigma_1(A) = M$

ABC est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ donc r transforme A en B, B en C, C en A, M en N, N en P et P en M donc G en G

donc GM = GN et GA = GB donc $\dfrac{GM}{GA} = \dfrac{GN}{GB}$ de plus $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GM}) = (\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GN})$ donc $\sigma_1(B) = N$.

de même $\sigma_1(C) = P$.

c. Il existe donc une similitude transformant A et B en respectivement M et N.
Comme il n'existe qu'une similitude transformant deux points distincts en deux points distincts, la similitude unique transformant A, B et C en M, N et P est la similitude σ.