EXERCICE 1

I. Restitution organisée de connaissances

1. Démontrer qu' un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$

2. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$

3. Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\,\overline{z} = |z|^2$.

Le plan complexe est rapporté àun repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On se propose de démontrer, à l'aide des nombres complexes, que tout triangle de sommets A, B, C, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c, et dont le centre du cercle circonscrit est situé à l'origine O, a pour orthocentre le point H d'affixe $a + b + c$.

II. Étude d'un cas particulier

On pose : $a = 3 + \mathrm{i}$, $b = -1 + 3\,\mathrm{i}$, $c = -\sqrt{5} - \mathrm{i}\sqrt{5}$.

1. Vérifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

2. Placer les points A, B, C et le point H d'affixe $a + b + c$, puis vérifier graphiquement que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

III. Étude du cas général.

ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit, et a, b, c sont les affixes respectives des points A, B, C.

1. Justifier le fait que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si : $a\,\overline{a} = b\,\overline{b} = c\,\overline{c}$.

1. On pose $w = \overline{b}\,c - b\,\overline{c}$.

a. En utilisant la caractérisation d'un nombre imaginaire pur établie dans le I., démontrer que w est imaginaire pur.

b. Vérifier l'égalité : $(b + c)(\overline{b} - \overline{c}) = w$ et justifier que : $\dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{w}{|b-c|^2}$

c. En déduire que le nombre complexe $\dfrac{b+c}{b-c}$ est imaginaire pur.

2. Soit H le point d'affixe $a + b + c$.

a. Exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$.

b. Prouver que $(\overrightarrow{CB} ; \overrightarrow{AH}) = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$, où k est un entier relatif quelconque.

(On admet de même que $(\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{BH}) = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$).

c. Que représente le point H pour le triangle ABC ?

CORRECTION

I. Restitution organisée de connaissances

1. Soit z un nombre complexe, il existe deux réels x et y tels que $z = x + \mathrm{i}\,y$, $\overline{z} = x - \mathrm{i}\,y$

$\overline{z} = -z \Leftrightarrow x - \mathrm{i}\,y = -(x + \mathrm{i}\,y) \Leftrightarrow 2\,x = 0 \Leftrightarrow z$ est imaginaire pur

2. $\overline{z} = z \Leftrightarrow x - \mathrm{i}\,y = x + \mathrm{i}\,y \Leftrightarrow 2\,\mathrm{i}\,y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z$ est réel

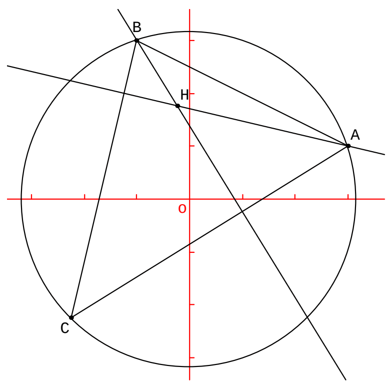
3. $|z|^2 = x^2 + y^2$ or $z\,\overline{z} = (x + \mathrm{i}\,y)(x - \mathrm{i}\,y) = x^2 - (\mathrm{i}\,y)^2$ donc $z\,\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$.

II. Étude d'un cas particulier

1. $OA = |a| = \sqrt{10}$ et $OB = |b| = \sqrt{10}$ et $OC = |c| = \sqrt{10}$ donc $OA = OB = OC$

O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

2. On vérifie que (AH) et (BH) sont deux hauteurs du triangle ABC donc que H est l'orthocentre de ce triangle.



III. Étude du cas général.

1. O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC $\Leftrightarrow OA = OB = OC$

$\Leftrightarrow OA^2 = OB^2 = BC^2 \Leftrightarrow |a|^2 = |b|^2 = |c|^2 \Leftrightarrow a\,\overline{a} = b\,\overline{b} = c\,\overline{c}$.

2. *a.* $w = \overline{b}\,c - b\,\overline{c}$ donc $\overline{w} = \overline{\overline{b}\,c - b\,\overline{c}}$ or $\overline{\overline{z}} = z$ donc $\overline{w} = \overline{\overline{b}\,c - b\,\overline{c}} = b\,\overline{c} - \overline{b}\,c = -w$

$\overline{w} = -w$ donc w est imaginaire pur.

b. $(b + c)(\overline{b} - \overline{c}) = b\,\overline{b} - b\,\overline{c} + c\,\overline{b} - c\,\overline{c}$

or $b\,\overline{b} = c\,\overline{c}$ donc $(b + c)(\overline{b} - \overline{c}) = -b\,\overline{c} + c\,\overline{b} = w$

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{(b+c)\,(\overline{b}-\overline{c})}{(b-c)\,(\overline{b}-\overline{c})} = \frac{w}{|b-c|^2}$$

3. *a.* $Z_{\overrightarrow{AH}} = a + b + c - a = b + c$ et $Z_{\overrightarrow{CB}} = b - c$

b. $\dfrac{Z_{\overrightarrow{AH}}}{Z_{\overrightarrow{CB}}} = \dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{w}{|b-c|^2}$ or $|b - c|^2 = \text{BC}^2$ est un réel et d'autre part w est un imaginaire pur non nul donc $\dfrac{Z_{\overrightarrow{AH}}}{Z_{\overrightarrow{CB}}}$ est un imaginaire pur non nul alors $\arg \dfrac{Z_{\overrightarrow{AH}}}{Z_{\overrightarrow{CB}}} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

donc $(\overrightarrow{CB}\ ;\ \overrightarrow{AH}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, où k est un entier relatif quelconque.

c. (AH) est une droite perpendiculaire au côté (BC) du triangle ABC passant par le sommet A donc est une hauteur de ce triangle, de même pour (CH)
H est le point d'intersection de ces deux hauteurs donc est l'orthocentre du triangle ABC.