Polynésie septembre 2008

EXERCICE 1 4 points

On rappelle que la probabilité d'un évènement A sachant que l'évènement B est réalisé se note $p_B(A)$.

Une urne contient au départ 30 boules blanches et 10 boules noires indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule de l'urne :

• si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et on ajoute *n* boules blanches supplémentaires.

• si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne et on ajoute *n* boules noires supplémentaires.

On tire ensuite au hasard une seconde boule de l'urne.

On note :

- B_1 l'évènement : « on obtient une boule blanche au premier tirage »
- B_2 l'évènement : « on obtient une boule blanche au second tirage »
- *A* l'évènement : « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».

1. Dans cette question, on prend $n = 10$.

a. Calculer la probabilité $p(B_1 \cap B_2)$ et montrer que $p(B_2) = \frac{3}{4}$.

b. Calculer $p_{B_2}(B_1)$.

c. Montrer que $p(A) = \frac{3}{10}$.

2. On prend toujours $n = 10$.

Huit joueurs réalisent l'épreuve décrite précédemment de manière identique et indépendante.

On appelle *X* la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de réalisations de l'évènement *A*.

a. Déterminer $p(X = 3)$. (On donnera la réponse à 10^{-2} près).

b. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire *X*.

3. Dans cette question *n* est un entier supérieur ou égal à 1.

Existe-t-il une valeur de *n* pour laquelle $p(A) = \frac{1}{4}$.

EXERCICE 2 5 points

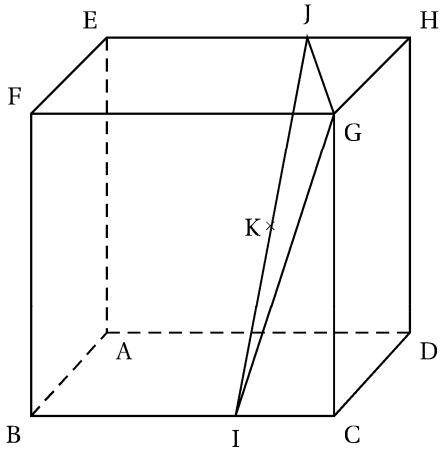
On donne la propriété suivante : « par un point de l'espace il passe un plan et un seul orthogonal à une droite donnée »

Sur la figure donnée en annexe, on a représenté le cube ABCDEFGH d'arête 1.

On a placé : les points I et J tels que :

$$\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{EJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$$ le milieu K de [IJ].

On appelle P le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ).



Partie A

1. Démontrer que le triangle FIJ est isocèle en F.

En déduire que les droites (FK) et (IJ) sont orthogonales.

On admet que les droites (GK) et (IJ) sont orthogonales.

2. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK).

3. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGP).

4. a. Montrer que les points F, G, K et P sont coplanaires.

b. En déduire que les points F, P et K sont alignés.

Partie B

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On appelle N le point d'intersection de la droite (GP) et du plan (ADB).

On note $(x ; y ; 0)$ les coordonnées du point N.

1. Donner les coordonnées des points F, G, I et J.

2. a. Montrer que la droite (GN) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ).

b. Exprimer les produits scalaires $\overrightarrow{GN} \cdot \overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{GN} \cdot \overrightarrow{FJ}$ en fonction de *x* et *y*.

c. Déterminer les coordonnées du point N.

3. Placer alors le point P sur la figure en annexe.

EXERCICE 3 5 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère l'ensemble (E) des suites (x_n) définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation suivante : pour tout entier naturel n non nul,

$$x_{n+1} - x_n = 0{,}24\, x_{n-1}.$$

1. On considère un réel λ non nul et on définit sur $\mathbb{N}$ la suite (t_n) par $t_n = \lambda^n$.

Démontrer que la suite (t_n) appartient à l'ensemble (E) si et seulement si λ est solution de l'équation $\lambda^2 - \lambda - 0{,}24 = 0$.
En déduire les suites (t_n) appartenant à l'ensemble (E).

On admet que (E) est l'ensemble des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par une relation de la forme : $u_n = \alpha\,(1{,}2)^n + \beta\,(-0{,}2)^n$ où α et β sont deux réels.

2. On considère une suite (u_n) de l'ensemble (E). Déterminer les valeurs de α et β telles que : $u_0 = 6$ et $u_1 = 6{,}6$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{39}{7}(1{,}2)^n + \dfrac{3}{7}(-0{,}2)^n$.

3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 1{,}4\, v_n - 0{,}05\, v_n^2$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1{,}4\, x - 0{,}05\, x^2$.

a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 8]$.

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq v_n < v_{n+1} \leq 8$.

2. En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

EXERCICE 4 6 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(e^x + 2\,e^{-x})$.

La courbe ($\mathscr{C}$) représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée en annexe.

Partie A - Étude de fonction *f* .

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x + \ln(1 + 2\,e^{-2x})$.
On admet que, pour tout réel x, $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$.

2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à ($\mathscr{C}$).

Étudier la position relative de ($\mathscr{C}$) et de (d).

3. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d') d'équation $y = -x + \ln 2$ est asymptote à ($\mathscr{C}$).

4. Étudier les variations de la fonction f. Montrer que le minimum de la fonction f est égal à $\dfrac{3}{2}\ln 2$.

5. Tracer les droites (d) et (d') sur la feuille annexe.

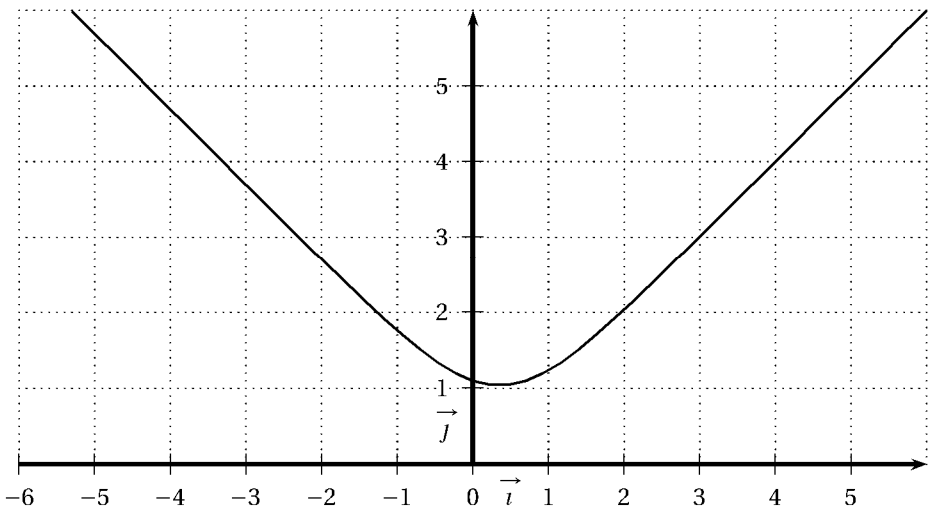
Partie B - Encadrement d'une intégrale.

On pose $I = \displaystyle\int_2^3 [f(x) - x]\,\mathrm{d}\,x$.

1. Donner une interprétation géométrique de I.

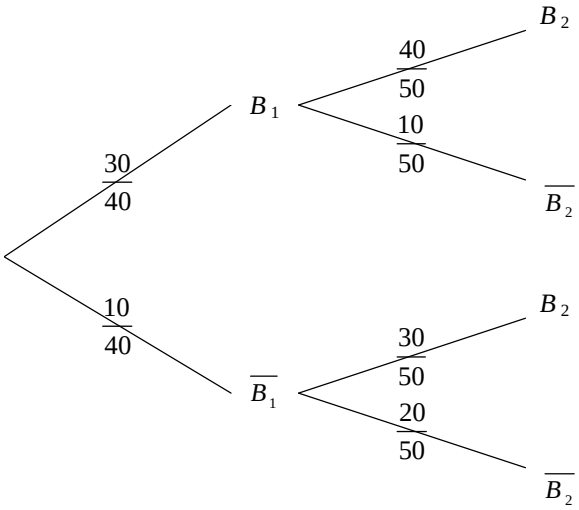
2. Montrer que, pour tout $X \in [0 ; +\infty[$, $\ln(1 + X) \leq X$.

3. En déduire que $0 \leq I \leq \displaystyle\int_2^3 2\,e^{-2x}\,\mathrm{d}\,x$ et donner un encadrement de I d'amplitude 0,02.



CORRECTION

EXERCICE 1 4 points



1. *a.* $p(B_1 \cap B_2) = \frac{30}{40} \times \frac{40}{50} = 0{,}6.$

$p(B_2) = p(B_1 \cap B_2) + p(\overline{B_1} \cap B_2) = 0{,}6 + \frac{10}{40} \times \frac{30}{50} = 0{,}75.$

1. *b.* $p_{B_2}(B_1) = \frac{p(B_1 \cap B_2)}{p(B_2)} = \frac{0{,}6}{0{,}75} = 0{,}8\,.$

1. *c.* $p(A) = p(\overline{B_1} \cap B_2) + p(B_1 \cap \overline{B_2})$

$p(A) = \frac{10}{40} \times \frac{30}{50} + \frac{30}{40} \times \frac{10}{50} = \frac{3}{10}\,.$

2. On a une succession de 8 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

l'évènement A est réalisé ($p = \frac{3}{10}$)

l'évènement A est réalisé ($q = \frac{7}{10}$)

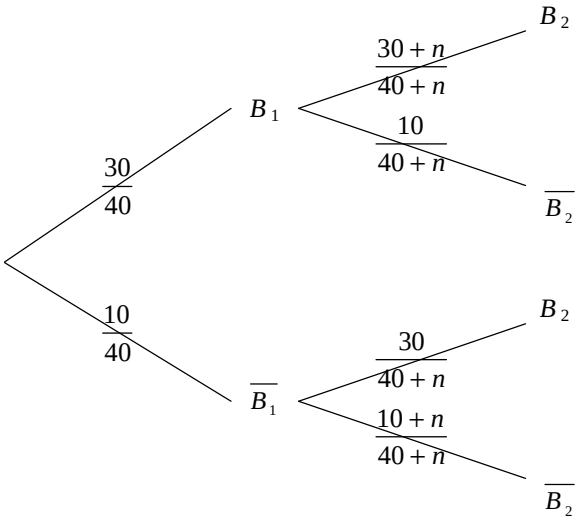
donc la variable aléatoire qui compte le nombre de réalisations de l'évènement A suit une loi binomiale de paramètres $(8\,;\ \frac{3}{10})$.

$p(X = k) = \binom{8}{k} \times \left(\frac{3}{10}\right)^k \times \left(\frac{7}{10}\right)^{8-k}$

a. Déterminer $p(X = 3) = \binom{8}{3} \times \left(\frac{3}{10}\right)^3 \times \left(\frac{7}{10}\right)^{8-3} \approx 0{,}25.$

b. $E(X) = n\,p = 8 \times \frac{3}{10} = 2{,}4.$

3.



$p(A) = p(\overline{B_1} \cap B_2) + p(B_1 \cap \overline{B_2})$

$p(A) = \frac{10}{40} \times \frac{30}{40+n} + \frac{30}{40} \times \frac{10}{40+n} = \frac{600}{40\,(40+n)} = \frac{15}{40+n}\,.$

$p(A) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{15}{40+n} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4 \times 15 = 40 + n \Leftrightarrow n = 20.$

EXERCICE 2 5 points
Partie A

1. BI = $\frac{2}{3}$ et BF = 1 or le triangle BIF est rectangle en B donc $FI^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 = \frac{13}{9}$.

EJ = $\frac{2}{3}$ et EF = 1 or le triangle EJF est rectangle en E donc $FJ^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1 = \frac{13}{9}$ donc FI = FJ, le triangle FIJ est isocèle en F.
K est le milieu de [IJ] donc la droite (FK) est la médiane issue de F du triangle FIJ
Le triangle FIJ isocèle en F donc (FK) est aussi la hauteur issue de F donc les droites (FK) et (IJ) sont orthogonales.

2. (IJ) est orthogonale à (FK) et à (GK), deux droites sécantes du plan (FGK), donc la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK).

3. (IJ) est orthogonale au plan (FGK) donc à toute droite de ce plan en particulier à (FG).
P est le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ) donc (GP) est orthogonale au plan (FIJ) donc à toute droite de ce plan en particulier à (IJ).
La droite (IJ) est orthogonale à (FG) et à (GP), deux droites sécantes du plan (FGP), donc la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGP).
La droite (IJ) est orthogonale au plan (FGP).

4. *a*. Par un point de l'espace il passe un plan et un seul orthogonal à une droite donnée or la droite (IJ) est orthogonale aux plans (FGP) et (FGK) qui tous deux passent par F donc ces deux plans sont confondus, les points F, G, K et P sont coplanaires.
b. En déduire que les points F, P et K sont alignés.
La droite (IJ) est orthogonale à (FP) et est orthogonale à (FK) or les points F, P, G et K sont coplanaires donc la droite (FP) et la droite (FK) sont confondues, donc les points F, P et K sont alignés.

Partie B

1. $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ donc les coordonnées du point sont F(1 ; 0 ; 1) de même G (1 ; 1 ; 1), I $\left(1 ; \frac{2}{3} ; 0\right)$ et J $\left(0 ; \frac{2}{3} ; 1\right)$.

2. *a*. P est le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ), donc (GP) est orthogonale à (FIJ).
N appartient à la droite (GP), donc (GN) est orthogonale à (FIJ) donc à toute droite de ce plan : en particulier à (FI) et à (FJ).
b. (GN) est orthogonale à (FI) donc $\overrightarrow{GN} \cdot \overrightarrow{FI} = 0$ et(GN) est orthogonale à (FJ) donc $\overrightarrow{GN} \cdot \overrightarrow{FJ} = 0$

Les coordonnées de N sont de la forme (x ; y ; 0) donc $\overrightarrow{GN}$ a pour coordonnées ($x - 1$; $y - 1$; -1)

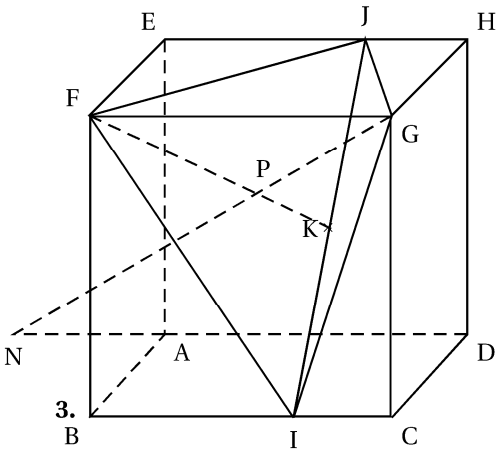
$\overrightarrow{FI}$ a pour coordonnées $\left(0 ; \frac{2}{3} ; -1\right)$ donc $\overrightarrow{GN} \cdot \overrightarrow{FI} = \frac{2}{3}(y - 1) + 1 = 0$ soit $\overrightarrow{GN} \cdot \overrightarrow{FI} = \frac{2}{3}y + \frac{1}{3} = 0$

$\overrightarrow{FJ}$ a pour coordonnées $\left(-1 ; \frac{2}{3} ; 0\right)$ donc $\overrightarrow{GN} \cdot \overrightarrow{FJ} = -(x - 1) + \frac{2}{3}(y - 1) = 0$ soit $\overrightarrow{GN} \cdot \overrightarrow{FJ} = -x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3} = 0$

c. Les coordonnées de N sont de la forme (x ; y ; 0) et $\frac{2}{3}y + \frac{1}{3} = 0$ et $-x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3} = 0$ soit $2y + 1 = 0$ et $-3x + 2y + 1 = 0$

donc $x = 0$ et $y = -\frac{1}{2}$ donc les coordonnées de N sont $\left(0 ; -\frac{1}{2} ; 0\right)$.

3. P est le point d'intersection des droites (FK) et (GN).



EXERCICE 3 5 points
Partie A

1. la suite (t_n) appartient à l'ensemble (E) si et seulement si $t_{n+1} - t_n = 0{,}24\, t_{n-1}$ soit $\lambda^{n+1} - \lambda^n = 0{,}24 \times \lambda^{n-1}$
$\lambda^{n-1} \times \lambda^2 - \lambda^{n-1} \times \lambda = 0{,}24 \times \lambda^{n-1}$
or $\lambda \neq 0$ donc la suite (t_n) appartient à l'ensemble (E) si et seulement si $\lambda^{n+1} - \lambda^n = 0{,}24 \times \lambda^{n-1} \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 0{,}24 = 0$.
$\Delta = 1 - 4 \times (-0{,}24) = 0{,}04$ donc $\lambda_1 = 1{,}2$ ou $\lambda_2 = -0{,}2$
Les suites (t_n) appartenant à l'ensemble (E) sont définies soit par $t_n = 1{,}2^n$ soit par $t_n = (-0{,}2)^n$

2. $u_0 = \alpha\,(1{,}2)^0 + \beta\,(-0{,}2)^0 = \alpha + \beta = 6$ et $u_1 = \alpha\,(1{,}2)^1 + \beta\,(-0{,}2)^1 = 1{,}2\,\alpha - 0{,}2\,\beta = 6{,}6$ donc α et β sont solutions de

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 6 \\ 1{,}2\,\alpha - 0{,}2\,\beta = 6{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}2\,\alpha + 0{,}2\,\beta = 1{,}2 \\ 1{,}2\,\alpha - 0{,}2\,\beta = 6{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}4\,\alpha = 7{,}8 \\ 1{,}2\,\alpha - 0{,}2\,\beta = 6{,}6 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \begin{cases} \alpha = \dfrac{7{,}8}{1{,}4} \\ \beta = 6 - \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{39}{7} \\ \beta = \dfrac{3}{7} \end{cases}$$

donc pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{39}{7}(1{,}2)^n + \dfrac{3}{7}(-0{,}2)^n$.

3. $-1 < -0{,}2 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (-0{,}2)^n = 0$; de plus $1{,}2 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}2^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Partie B

1. *a.* f est un polynôme donc est définie dérivable sur [0 ; 8], et $f'(x) = 1{,}4 - 0{,}1\,x$, si $x \leq 14$ alors $1{,}4 - 0{,}1\,x > 0$ donc f est croissante sur [0 ; 8].

b. $v_0 = 6$ et $v_1 = = 1{,}4\,v_n - 0{,}05\,v_0^2 = 6{,}6$ donc $0 \leq v_0 \leq v_1 \leq 8$
Montrons que, pour tout entier naturel n, si $0 \leq v_n < v_{n+1} \leq 8$ alors $0 \leq v_{n+1} < v_{n+2} \leq 8$.
f est croissante sur [0 ; 8] donc si $0 \leq v_n < v_{n+1} \leq 8$ alors $f(0) \leq f(v_n) < f(v_{n+1}) \leq f(8)$ or $f(0) = 0$ et $f(8) = 8$ donc $0 \leq v_{n+1} < v_{n+2} \leq 8$.
La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

2. La suite (v_n) est croissante majorée par 8 donc est convergente vers une limite ℓ comprise entre v_0 ($v_0 = 6$) et 8.
$v_{n+1} = f(v_n)$, pour tout n de N, $v_n \in [0 ; 8]$ et f est continue sur [0 ; 8] donc ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$
$1{,}4\,x - 0{,}05\,x^2 = x \Leftrightarrow 0{,}4\,x - 0{,}05\,x^2 = 0 \Leftrightarrow x\,(0{,}4 - 0{,}05\,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{0{,}4}{0{,}05} = 8$
ℓ est comprise entre 6 et 8 donc $\ell = 8$.

EXERCICE 4 6 points

Partie A - Étude de fonction f .

1. Pour tout réel x, $f'(x) = \ln(e^x + 2e^{-x}) = \ln[e^x(1 + 2e^{-2x})] = \ln(e^x) + \ln(1 + 2e^{-2x})$.
donc pour tout réel x, $f'(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$.

2. $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + 2e^{-2x}) = \ln 1 = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f(x) - x = \ln(1 + 2e^{-2x})$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$ donc la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc $1 + 2e^{-2x} > 1$ donc $\ln(1 + 2e^{-2x}) > 0$.

Pour tout réel x, $f(x) - x > 0$ donc $(\mathscr{C})$ est au dessus de (d).

3. $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(2 + e^{2x}) = \ln 2$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$f(x) - (-x + \ln 2) = \ln(1 + 2e^{2x}) - \ln 2$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (-x + \ln 2) = 0$ donc la droite (d) d'équation $y = -x + \ln 2$ est asymptote à $(\mathscr{C})$ en $-\infty$.

4. f est définie dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = \dfrac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}} = e^{-x} \dfrac{e^{2x} - 2}{e^x + 2e^{-x}}$. $f'(x)$ a le même signe que $e^{2x} - 2$

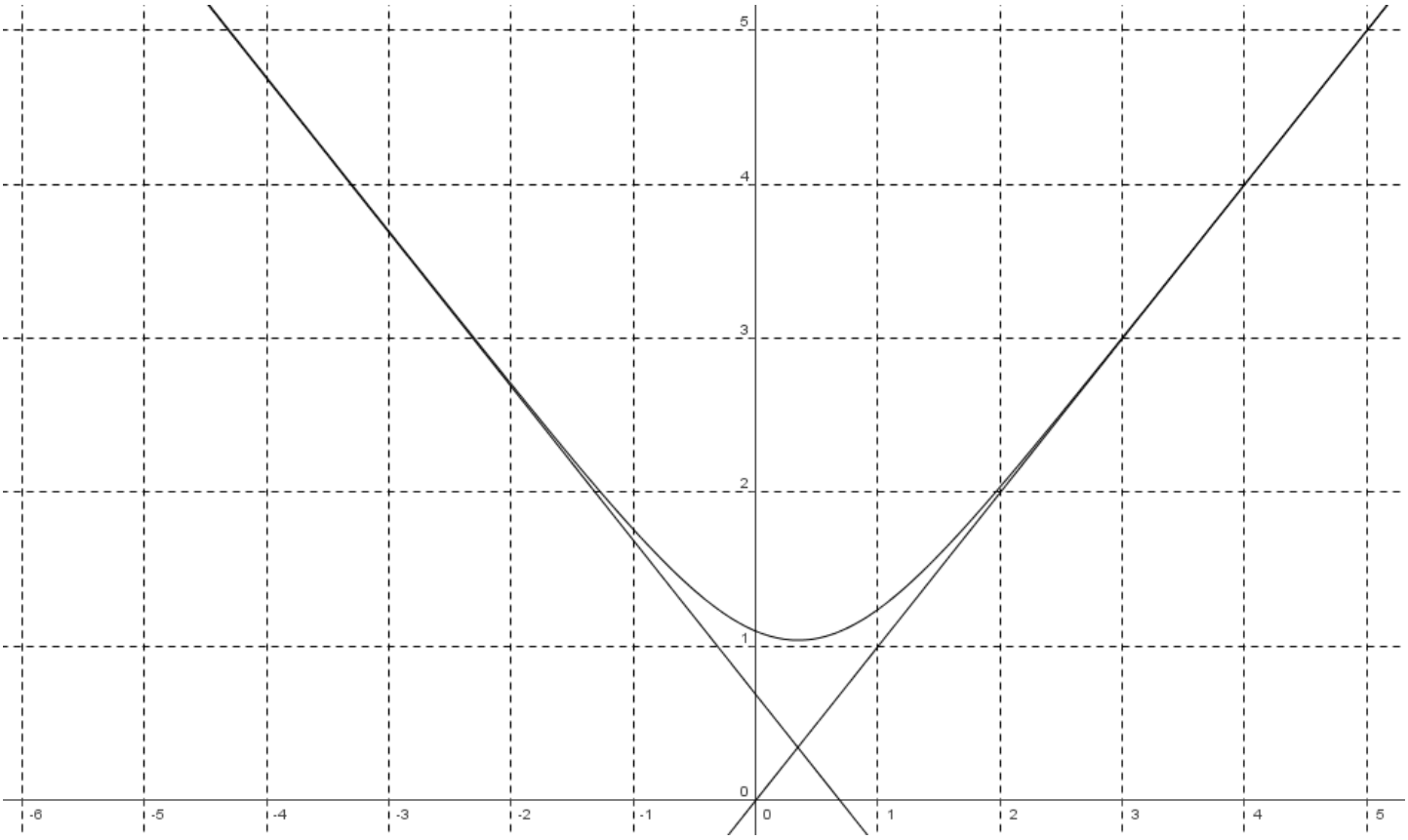
$e^{2x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x} \geq 2 \Leftrightarrow 2x \geq \ln 2 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{2}\ln 2$.

f est donc croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}\ln 2 ; +\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty ; \dfrac{1}{2}\right]$ donc f admet un minimum en $\dfrac{1}{2}\ln 2$.

$\dfrac{1}{2}\ln 2 = \ln\left(\sqrt{2}\right)$ donc $e^{\ln\left(\sqrt{2}\right)} + 2e^{-\ln\left(\sqrt{2}\right)} = \sqrt{2} + 2 \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}}$

$f\left(\dfrac{1}{2}\ln 2\right) = \ln\left(2^{\frac{3}{2}}\right) = \dfrac{3}{2}\ln 2$. Le minimum de la fonction f est égal à $\dfrac{3}{2}\ln 2$.

5.



Partie B - Encadrement d'une intégrale.

1. Sur [2 ; 3], ($\mathscr{C}$) est au dessus de (d) donc I est l'aire comprise entre la courbe de f, la droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.

2. Soit $g(x) = x - \ln(1 + x)$, g est définie dérivable (somme de fonctions dérivables) sur $[0 ; +\infty[$, $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$.

$x \geq 0$ donc $g'(x) \geq 0$ donc g est croissante sur $[0 ; +\infty[$, donc pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $g(x) \geq g(0)$ (or $g(0) = 0$) donc $g(x) \geq 0$ donc pour tout $X \in [0 ; +\infty[$, $\ln(1 + X) \leq X$.

3. $f(x) - x = \ln(1 + 2\,e^{-2x})$ or $2\,e^{-2x} > 0$ donc d'après la propriété précédente : $0 \leq \ln(1 + 2\,e^{-2x}) \leq 2\,e^{-2x}$

Les fonction $x \to \ln(1 + 2\,e^{-2x})$ et $x \to 2\,e^{-2x}$ sont continues sur [2 ; 3] donc $0 \leq I \leq \int_2^3 2\,e^{-2x}\,dx$

$0 \leq I \leq \left[-e^{-2x} \right]_2^3$ soit $0 \leq I \leq e^{-4} - e^{-6}$ donc $0 \leq I \leq e^{-4} - e^{-6} \leq 0{,}0159$ soit $0 \leq I \leq 0{,}02$.