Nouvelle-Calédonie mars 2017

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$ et on note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Partie A

1. Justifier toutes les informations du tableau de variations de f donné ci-dessous.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	↘	0

2. Soit F la fonction définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ par : $F(x) = (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

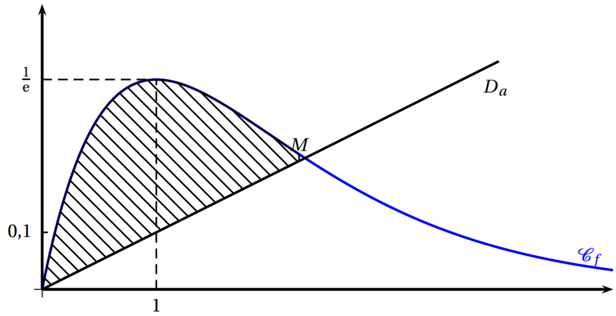
Démontrer que la fonction F est une primitive de f sur $[0\,;+\infty[$.

Partie B

Soit a un nombre réel tel que $0 < a < 1$. On considère la droite D_a d'équation $y = a\,x$ et M le point d'intersection de la droite D_a avec la courbe C_f. On note x_M l'abscisse du point M.

On note $\mathscr{H}(a)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous, c'est-à-dire du domaine situé sous la courbe C_f au-dessus de la droite D_a et entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = x_M$.

Le but de cette partie est d'établir l'existence et l'unicité de la valeur de a telle que $\mathscr{H}(a) = 0{,}5$ puis d'étudier un algorithme.



1. Prouver que la droite D_a et la courbe C_f ont un unique point d'intersection M distinct de l'origine.

On admet dans la suite de l'exercice que le point M a pour abscisse $x_M = -\ln a$ et que la courbe C_f est située au-dessus de la droite D_a sur l'intervalle $[0\,;-\ln(a)]$.

2. Montrer que $\mathscr{H}(a) = a\ln(a) - \dfrac{1}{2}a\,(\ln(a))^2 + 1 - a$.

3. Soit la fonction $\mathscr{H}$ définie sur $]0\,;1]$ par $\mathscr{H}(x) = x\ln(x) - \dfrac{1}{2}x\,(\ln(x))^2 + 1 - x$.

On admet que $\mathscr{H}$ est dérivable sur $]0\,;1]$ et que son tableau de variations correspond à celui qui est proposé ci-dessous.

x	0		1
$\mathscr{H}(x)$	1	↘	0

Justifier qu'il existe un unique réel $a \in]0\,;1[$ tel que $\mathscr{H}(a) = 0{,}5$.

4. On considère l'algorithme présenté ci-dessous.

VARIABLES	A, B et C sont des nombres ; p est un entier naturel.
INITIALISATION	Demander la valeur de p A prend la valeur 0 B prend la valeur 1

TRAITEMENT	Tant que $B - A > 10^{-p}$
	    C prend la valeur (A + B)/2
	    Si $\mathscr{H}(C) > 0{,}5$
	        Alors A prend la valeur de C
	        Sinon B prend la valeur de C
	    Fin de la boucle Si
	Fin de la boucle Tant que

SORTIE	Afficher A et B.

Que représentent les valeurs A et B affichées en sortie de cet algorithme ?

5. Donner un encadrement d'amplitude 0,01 de a.

EXERCICE 2 3 points Commun à tous les candidats

Répondre à chacune des affirmations ci-dessous par Vrai ou Faux en justifiant la réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Les deux questions sont indépendantes l'une de l'autre.

1. La durée de vie T (exprimée en années) d'un appareil électronique suit la loi exponentielle de paramètre λ où $\lambda > 0$.

On sait qu'un tel appareil a une durée de vie moyenne de quatre ans.

La probabilité que cet appareil fonctionne deux années de plus sachant qu'il *a* déjà fonctionné trois ans est d'environ 0,39 à 0,01 près.

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

L'équation $z^3 - 3z^2 + 3z = 0$ admet trois solutions dans l'ensemble des nombres complexes C, qui sont les affixes de trois points formant un triangle équilatéral.

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Des étudiants d'une université se préparent à passer un examen pour lequel quatre thèmes (A, B, C et D) sont au programme.

Partie A

Sur les 34 sujets de l'examen déjà posés, 22 portaient sur le thème A.

Peut-on rejeter au seuil de 95% l'affirmation suivante : « il y a une chance sur deux que le thème A soit évalué le jour de l'examen » ?

Partie B

Le thème A reste pour beaucoup d'étudiants une partie du programme difficile à maîtriser. Un stage de préparation est alors proposé pour travailler ce thème.

Lors de l'examen, on a constaté que s'il y a un exercice portant sur le thème A :

- 30% des étudiants n'ayant pas suivi le stage ne traitent pas l'exercice ;
- $\frac{5}{6}$ des étudiants ayant suivi le stage l'ont traité.

On sait de plus que 20% des étudiants participent au stage.

Lors des résultats de l'examen, un étudiant s'exclame : « Je n'ai pas du tout traité le thème A ».

Quelle est la probabilité que cet étudiant ait suivi le stage ? On arrondira le résultat à 0,001 près.

Partie C

On suppose que la variable aléatoire *T*, associant la durée (exprimée en minutes) que consacre un étudiant de cette université pour la composition de cet examen, suit la loi normale d'espérance $\mu = 225$ et d'écart-type σ où $\sigma > 0$.

La probabilité qu'un étudiant finisse son examen en moins de 235 minutes est de 0,98.

Déterminer une valeur approchée de σ à 0,1 près.

On pourra, par exemple, introduire la variable aléatoire $Z = \frac{T - 225}{\sigma}$.

EXERCICE 4 3 points Commun à tous les candidats

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n} \text{ pour tout entier naturel } n \geq 0 \end{cases}$.

On obtient à l'aide d'un tableur les premiers termes de cette suite :

	A	B	C
1		u_n	u_n
2	n	(en valeurs exactes)	(en valeurs approchées)
3	0	0	0
4	1	½	0,5
5	2	2/3	0,666 666 667
6	3	¾	0,75
7	4	4/5	0,8
8	5	5/6	0,833 333 333
9	6	6/7	0,857 142 857
10	7	7/8	0,875
11	8	8/9	0,888 888 889
12	9	9/10	0,9
13	10	10/11	0,909 090 909

Prouver que la suite (u_n) converge.

EXERCICE 5 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O ; I, J, K).

On considère les points A(− 1 ; − 1 ; 0), B(6 ; – 5 ; 1), C(1 ; 2 ; – 2) et S(13 ; 37 ; 54).

1. *a*. Justifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

b. Prouver que le vecteur $\vec{n}$ (5 ; 16 ; 29) est un vecteur normal au plan (ABC).

c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

2. *a*. Déterminer la nature du triangle ABC.

b. Démontrer que la valeur exacte de l'aire du triangle ABC est, en unités d'aire, $\dfrac{\sqrt{1122}}{2}$.

3. *a*. Prouver que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

b. La droite (Δ) perpendiculaire au plan (ABC) passant par le point S coupe le plan (ABC) en un point noté H.

Déterminer les coordonnées du point H.

4. Déterminer le volume du tétraèdre SABC.

On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $\dfrac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

CORRECTION

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Partie A

1. $f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$

La fonction exponentielle est strictement positive sur R donc $f'(x)$ a le même signe que $1 - x$ donc si $x > 1$, $f'(x) < 0$ et si $0 < x < 1$, $f'(x) > 0$

f est donc croissante sur] 0 ; 1] et décroissante sur [1 ; + ∞ [

$f(1) = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} = 0$ soit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\mathrm{e}^{0} = 1$ donc $f(0) = 0$ d'où le tableau de variations de f

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

2. Soit $\begin{cases} u(x) = -x-1 & u'(x) = -1 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-x} & v'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$

$F'(x) = -1\,\mathrm{e}^{-x} + (-x-1)(-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}[-1-(-x-1)] = x\,\mathrm{e}^{-x} = f(x)$ donc la fonction F est une primitive de f sur [0 ; + ∞ [.

Partie B

1. Il suffit de résoudre $f(x) = a\,x \Leftrightarrow x\,\mathrm{e}^{-x} = a\,x \Leftrightarrow x(\mathrm{e}^{-x} - a) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\mathrm{e}^{-x} = a$

donc $f(x) = a\,x \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\ln a$ ($0 < a < 1$ donc $-\ln a > 0$)

donc la droite D_a et la courbe C_f ont un unique point d'intersection M ($-\ln a$; $-a\ln a$) distinct de l'origine.

2. $\mathcal{H}(a) = \displaystyle\int_0^{-\ln a} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{(-a\ln a)(-\ln a)}{2} = F(-\ln a) - F(0) - \frac{(-a\ln a)(-\ln a)}{2}$

$\mathcal{H}(a) = (\ln a - 1)\,\mathrm{e}^{\ln a} - (-1) - \dfrac{1}{2}a(\ln(a))^2$

$\mathcal{H}(a) = a(\ln(a) - 1) + 1 - \dfrac{1}{2}a(\ln(a))^2$ soit $\mathcal{H}(a) = a\ln(a) - \dfrac{1}{2}a(\ln(a))^2 + 1 - a$.

3. D'après le tableau de variation, $\mathcal{H}$ est définie, continue, strictement décroissante sur] 0 ; 1],

$\lim\limits_{x \to 0} \mathcal{H}(x) = 1$ et $\mathcal{H}(1) = 0$, $0,5 \in$] 0 ; 1 [donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $a \in$] 0 ; 1 [tel que $\mathcal{H}(a) = 0,5$.

4. Cet algorithme détermine par dichotomie un encadrement d'amplitude 10^{-p} de a.

A est la valeur inférieure de cet encadrement et B la valeur supérieure.

5. En utilisant l'algorithme précédent :

A	0	0	0	0	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625
B	1	0,5	0,25	0,125	0,125	0,09375	0,078125	0,0703125
C	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,09375	0,078125	0,0703125	0,06640625
B – A	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0,015625	0,0078125

donc $0,0625 < a < 0,0703125$

En utilisant la méthode du balayage : $\mathcal{H}(0,06) < 0,5$ et $\mathcal{H}(0,07) > 0,5$ donc $0,06 < a < 0,07$

EXERCICE 2 3 points Commun à tous les candidats

1. Un tel appareil a une durée de vie moyenne de quatre ans donc $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = 4$ soit $\lambda = 0{,}25$.

Une loi exponentielle est une loi durée de vie sans vieillissement donc la probabilité que cet appareil fonctionne deux années de plus sachant qu'il a déjà fonctionné trois ans est $P_{(T \geq 3)}(T \geq 3 + 2) = P(T \geq 2) = e^{-2\lambda} = e^{-0{,}5}$ soit environ 0,61 donc l'affirmation est fausse.

2. $z^3 - 3z^2 + 3z = 0 \Leftrightarrow z(z^2 - 3z + 3) = 0$

$z^2 - 3z + 3 = 0$; $\Delta = 9 - 4 \times 3 = -3$ donc $z_1 = \dfrac{3 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{3 + i\sqrt{3}}{2}$

En appelant A le point d'affixe z_1 et B le point d'affixe z_2

$|z_1| = |z_2| = \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{3}{4}} = \sqrt{3}$ donc OA = OB

$|z_2 - z_1| = \left| i\sqrt{3} \right| = \sqrt{3}$ donc OA = OB = AB donc le triangle OAB est équilatéral.

EXERCICE 3 4 points Commun à tous les candidats

Partie A

On veut tester l'hypothèse « il y a une chance sur deux ($p = 0{,}5$) que le thème A soit évalué le jour de l'examen » dans un échantillon de taille $n = 34$, $n = 34 > 30$ et $n\,p = n(1 - p) = 17 > 5$ donc les conditions sont vérifiées pour établir un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion que le thème A soit évalué le jour de l'examen :

$I = \left[0{,}5 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}5 \times 0{,}5}{34}} \,;\, 0{,}5 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}5 \times 0{,}5}{34}} \right]$ soit $I = [0{,}33 \,;\, 0{,}67]$

$\dfrac{22}{34} \approx 0{,}647$ donc $\dfrac{22}{34} \in I$, l'hypothèse est acceptée au risque 5 %.

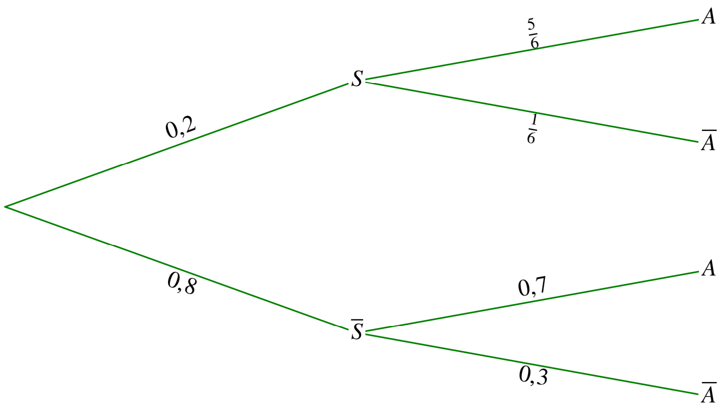
Partie B

$P(\overline{A}) = 0{,}2 \times \dfrac{1}{6} + 0{,}8 \times 0{,}3 = \dfrac{0{,}82}{3} = \dfrac{41}{150}$

$P(S \cap \overline{A}) = 0{,}2 \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{0{,}1}{3}$

donc $P_{\overline{A}}(S) = \dfrac{P(S \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{1}{30} \times \dfrac{150}{41} = \dfrac{5}{41}$

soit 0,122 à 0,001 près.



Partie C

$Z = \dfrac{T - 225}{\sigma}$ donc Z suit une loi normale centrée réduite.

$P(T \leq 235) = P\left(Z \leq \dfrac{235 - 225}{\sigma} \right) = 0{,}98$ donc $\dfrac{10}{\sigma} = \approx 2{,}054$ soit $\sigma = \dfrac{10}{2{,}054}$ donc $\sigma \approx 4{,}9$.

EXERCICE 4 3 points Commun à tous les candidats

Il suffit de montrer que la suite est croissante majorée par 1.

Montrons que par récurrence que pour tout n, $0 \leq u_n < 1$

Initialisation $u_0 = 0$ donc $0 \leq u_0 < 1$

Hérédité, montrons que pour tout n de N, si $0 \leq u_n < 1$ alors $0 \leq u_{n+1} < 1$

$0 \leq u_n < 1$ donc $1 < 2 - u_n \leq 2$ donc $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{2 - u_n} < 1$ donc $0 \leq u_{n+1} < 1$

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout n de N, $0 \leq u_n < 1$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2 - u_n} - u_n = \dfrac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2 - u_n} = \dfrac{(u_n - 1)^2}{2 - u_n}$, $2 - u_n > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$

La suite (u_n) est croissante majorée par 1 donc converge.

EXERCICE 5 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère les points A(− 1 ; − 1 ; 0), B(6 ; – 5 ; 1), C(1 ; 2 ; – 2) et S(13 ; 37 ; 54).

1. *a.* $\overrightarrow{AB}$ (7 ; – 4 ; 1) et $\overrightarrow{AC}$ (2 ; 3 ; – 2), les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, les points A, B et C définissent bien un plan.

b. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 7 \times 5 - 4 \times 16 + 29 = 35 - 64 + 29 = 0$

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 5 + 3 \times 16 - 2 \times 29 = 10 + 48 - 58 = 0$

Le vecteur $\vec{n}$ (5 ; 16 ; 29) est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Le vecteur $\vec{n}$ (5 ; 16 ; 29) est un vecteur normal au plan (ABC) donc une équation du plan (ABC) est de la forme :

$5x + 16y + 29z + d = 0$

A appartient à ce plan donc $-5 - 16 + d = 0$ soit $d = 21$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est $5x + 16y + 29z + 21 = 0$

2. *a.* $AB^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 49 + 16 + 1 = 66$ et $AC^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 + 9 + 4 = 17$

$\overrightarrow{BC}$ (– 5 ; 7 ; – 3) donc $BC^2 = 25 + 49 + 9 = 83$ or $66 + 17 = 83$ donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$, le triangle ABC est rectangle en A.

b. La valeur exacte de l'aire du triangle ABC est $\dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{\sqrt{66 \times 17}}{2} = \dfrac{\sqrt{1122}}{2}$ unités d'aire.

3. *a.* Une équation cartésienne du plan (ABC) est $5x + 16y + 29z + 21 = 0$

$5x_S + 16y_S + 29z_S + 21 = 5 \times 13 + 16 \times 37 + 29 \times 54 + 21 \neq 0$ donc S n'appartient pas au plan (ABC), les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

b. La droite (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC) donc a pour vecteur directeur $\vec{n}$, elle passe par le point S donc une représentation paramétrique de (Δ) est $\begin{cases} x = 5t + 13 \\ y = 16t + 37 \\ z = 29t + 54 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

$H \in (D) \cap (ABC)$ donc H a des coordonnées de la forme $(5t + 13 ; 16t + 37 ; 29t + 54)$ et $5x_H + 16y_H + 29z_H + 21 = 0$

donc $5(5t + 13) + 16(16t + 37) + 29(29t + 54) = 0$

soit $2244 + 1122t = 0 \Leftrightarrow t = -2$

H a pour coordonnées (3 ; 5 ; – 4)

4. (SH) est la hauteur issue de S dans le tétraèdre ABCS.

$SH^2 = (13 - 3)^2 + (37 - 5)^2 + (54 + 4)^2 = 4488$ donc le volume du tétraèdre SABC est égal à $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{1122}}{2} \times \sqrt{4488} = \dfrac{1122}{3} = 374$ unités de volume.