LIBAN MAI 2006

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x \ln(x+1)$.

Sa courbe représentative (C) dans un repère orthogonal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ est donnée en annexe.

1. *a*. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b. L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe (C) au point O ?

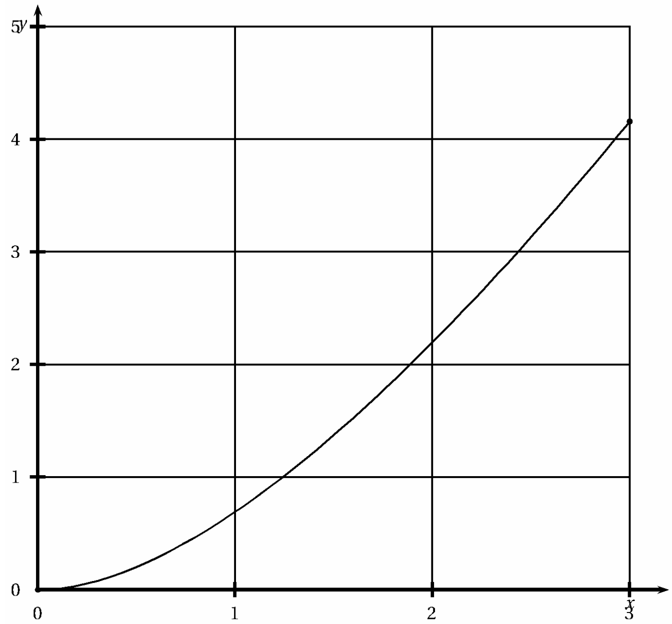
2. On pose $I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$.

a. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq -1$, $\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

b. Calculer I.

3. À l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0,25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0 ; 1]$. On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.



Partie B : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur N par $u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). La suite (u_n) converge-*t*-elle ?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$.

En déduire la limite de la suite (u_n).

CORRECTION

Partie A

1. *a*. $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$

$x > 0$ donc $x + 1 > 1$ donc $\ln(x+1) > 0$ de même $\frac{x}{x+1} > 0$ donc $f'(x) > 0$ sur $]0 ; +\infty[$

$f'(0) = 0$ donc f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$

1. *b*. $f(0) = 0$ donc la courbe passe par O, $f'(0) = 0$ donc la tangente en O est l'axe des abscisses.

2. *a*. $\frac{x^2-1}{x+1} = x-1$ donc $\frac{x^2}{x+1} = x-1+\frac{1}{x+1}$

2. *b*. $I = \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1)\right]_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}$

3. $A = \int_0^1 x\ln(x+1)\,dx$ donc $A = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x+1)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$ soit $A = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

4. La fonction f est définie continue strictement croissante sur [0 ; 1]
$f([0 ; 1] = [0 ; \ln 2]$ or $\ln 2 > 0,25$ donc l'équation $f(x) = 0,25$ admet une seule solution α dans [0 ; 1]
$f(0,56) < 0,25$ et $f(0,57) > 0,25$ donc $0,56 < \alpha < 0,57$

Partie B
1.

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1)\, \mathrm{d}x - \int_0^1 x^n \ln(x+1)\, \mathrm{d}x$$

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^n (x-1) \ln(x+1)\, \mathrm{d}x$$

si $0 \leq x \leq 1$ alors $x^n \geq 0$ et $(x - 1) \leq 0$ de plus $\ln(x + 1) \geq 0$
donc la fonction $x \to x^n (1 - x) \ln(x + 1)$ est continue sur [0 ; 1] et négative sur [0 ; 1]
donc $\int_0^1 x^n (x-1) \ln(x+1)\, \mathrm{d}x \leq 0$
$u_{n+1} - u_n \leq 0$ donc (u_n) est décroissante.

si $0 \leq x \leq 1$ alors $x^n \geq 0$ et $\ln(x + 1) \geq 0$
donc la fonction $x \to x^n \ln(x + 1)$ est continue sur [0 ; 1] et positive sur [0 ; 1] donc $\int_0^1 x^n \ln(x+1)\, \mathrm{d}x \geq 0$
donc (u_n) est décroissante, minorée par 0 donc converge vers une limite L et $L \geq 0$

2. si $0 \leq x \leq 1$ alors $0 \leq \ln(x + 1) \leq \ln 2$
donc $0 \leq x^n \ln(x + 1) \leq x^n \ln 2$
donc $0 \leq \int_0^1 x^n \ln(x+1)\, \mathrm{d}x \leq \int_0^1 x^n \ln(2)\, \mathrm{d}x$

$$0 \leq \int_0^1 x^n \ln(x+1)\, \mathrm{d}x \leq \ln 2 \int_0^1 x^n\, \mathrm{d}x$$

$$0 \leq \int_0^1 x^n \ln(x+1)\, \mathrm{d}x \leq \ln 2 \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$0 \leq \int_0^1 x^n \ln(x+1)\, \mathrm{d}x \leq \frac{\ln 2}{n+1}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$