POLYNESIE SEPTEMBRE 2006

L'espace est muni d'un repère orthonormal (O ; i , j , k).

Soit (P_1) le plan d'équation cartésienne $-2x+y+z-6=0$ et (P_2) le plan d'équation cartésienne $x-2y+4z-9=0$.

1. Montrer que (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires.

On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal non nul à l'un est orthogonal à un vecteur normal non nul à l'autre.

2. Soit (D) la droite d'intersection de (P_1) et (P_2).

Montrer qu'une représentation paramétrique de (D) est : $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-8+3t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=\quad t \end{cases}$

3. Soit M un point quelconque de (D) de paramètre t

Soit A le point de coordonnées $(-9 ; -4 ; -1)$.

a. Vérifier que A n'appartient ni à (P_1) ni à (P_2).

b. Exprimer AM^2 en fonction de t.

c. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=2t^2-2t+3$.

Étudier les variations de f .

Pour quel point M, la distance AM est-elle minimale ?

Dans la suite, on désignera ce point par I. Préciser les coordonnées du point I.

4. Soit (Q) le plan orthogonal à (D) passant par A.

a. Déterminer une équation de (Q).

b. Démontrer que I est le projeté orthogonal de A sur (D).

CORRECTION

1. (P_1) est le plan d'équation cartésienne $-2x+y+z-6=0$ donc un vecteur normal à P_1 est $n_1(-2 ; 1 ; 1)$

(P_2) est le plan d'équation cartésienne $x-2y+4z-9=0$ donc un vecteur normal à P_2 est $n_2(1 ; -2 ; 4)$

$n_1 . n_2 = -2\times 1 + 1\times(-2) + 1\times 4 = 0$

n_1 est orthogonal à n_2 donc P_1 et P_2 sont orthogonaux.

2. Soit (Δ) la droite d'équations paramétriques : $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-8+3t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=\quad t \end{cases}$

si $t=0$, B$(-7 ; -8 ; 0)$ appartient à (Δ) or (P_1) est le plan d'équation cartésienne $-2x+y+z-6=0$ et $-2\times(-7)+(-8)+0-6=0$ donc B $\in P_1$.

(P_2) est le plan d'équation cartésienne $x-2y+4z-9=0$ et $(-7)-2\times(-8)+4\times 0-9=0$ donc B $\in P_2$.

B $\in P_1$ et B $\in P_2$ donc B $\in P_1\cap P_2$ soit B $\in$ (D)

si $t=1$, C$(-5 ; -5 ; 1)$ appartient à (Δ) or (P_1) est le plan d'équation cartésienne $-2x+y+z-6=0$ et $-2\times(-5)+(-5)+1-6=0$ donc C $\in P_1$.

(P_2) est le plan d'équation cartésienne $x-2y+4z-9=0$ et $(-5)-2\times(-5)+4\times 1-9=0$ donc C $\in P_2$.

C $\in P_1$ et C $\in P_2$ donc C $\in P_1\cap P_2$ soit C $\in$ (D)

B et C appartiennent à (Δ) et à (D) donc ces deux droites sont confondues, donc une représentation paramétrique de (D) est : $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-8+3t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=\quad t \end{cases}$

3. *a*. (P_1) est le plan d'équation cartésienne $-2x+y+z-6=0$ et $-2\times(-9)+(-4)-1-6\neq 0$ donc A $\notin P_1$.

(P_2) est le plan d'équation cartésienne $x-2y+4z-9=0$ et $(-9)-2\times(-4)+4\times(-1)-9=0$ donc A $\notin P_2$.

A n'appartient ni à (P_1) ni à (P_2).

b. M est un point quelconque de (D) de paramètre t donc ses coordonnées sont $(-7+2t ; -8+3t ; t)$ donc

$AM^2=(-7+2t+9)^2+(-8+3t+4)^2+(t+1)^2 \Leftrightarrow AM^2=(2t+2)^2+(3t-4)^2+(t+1)^2$

$\Leftrightarrow AM^2=4t^2+8t+4+9t^2-24t+16+t^2+2t+1 \Leftrightarrow AM^2=7(2t^2-2t+3)$

c. f est une fonction définie dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(t)=4t-2$ donc

t	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

f admet un minimum pour $t = \frac{1}{2}$

$AM^2 = 7 f(t)$ donc AM^2 est minimale pour $t = \frac{1}{2}$ donc AM est minimale pour $t = \frac{1}{2}$

Le point I de paramètre $\frac{1}{2}$ a pour coordonnées $\begin{cases} x = -7 + 2 \times \frac{1}{2} \\ y = -8 + 3 \times \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$ soit $I\left(-6 ; -\frac{13}{2} ; \frac{1}{2}\right)$

4. *a*. (D) a pour équations paramétriques : $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -8 + 3t \\ z = t \end{cases}$

donc un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}\,(2 ; 3 ; 1)$

(Q) est le plan orthogonal à (D) passant par A donc est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} . \vec{u} = 0$
soit $2x + 3y + z - 31 = 0$

b. Pour déterminer le projeté orthogonal de A sur (D) il faut déterminer le plan orthogonal à (D) passant par A : (Q)
le projeté orthogonal de A sur (D) est le point d'intersection de (D) et de (Q)

I est un point de (D) il suffit donc de vérifier qu'il appartient à (Q). I est le point de coordonnées $\left(-6 ; -\frac{13}{2} ; \frac{1}{2}\right)$

$2 \times (-6) + 3 \times \left(-\frac{13}{2}\right) + \frac{1}{2} - 31 = -12 - 19 - 31 = 0$ donc $I \in (Q)$